OEUVRES
DE
MATHEMATIQUES
Contenant les
ELEMENS
DE
GEOMETRIE,
DISCOURS DU
MOUVEMENT LOCAL,
LA STATIQUE,
ET
Deux Machines propres à faire
LES QUADRANS.

Par le R. P. IGNACE GASTON PARDIES, *de la Compagnie de* JESUS.

QUATRIE'ME EDITION.

A LA HAYE,
Chez HENRI DU SAUZET.

M. DCC. XV.

AVERTISSEMENT DU LIBRAIRE AU LECTEUR.

LEs Ouvrages du P. Pardies ont été reçeus en France avec un applaudiſſement univerſel, & je puis dire qu'ils ne l'ont guéres été moins bien en Hollande, puis que j'y en ay fait un débit conſidérable, tant que j'en ay pû tirer de France. Mais la guerre

aiant interrompu le commerce, j'ay veu avec chagrin, le cours de ces Ouvrages arrêté en ce païs-cy. C'eſt ce qui m'obligea dès l'année paſſée de faire imprimer d'abord ſeulement deux Traitez de cét Auteur, à ſçavoir, les Elemens de Geometrie, & le Diſcours de la connoiſſance des Bêtes. Et comme j'ay trouvé dans la ſuite que cela ne ſuffiſoit pas pour contenter pleine-

ment

ment les curieux, je me ſuis rendu aux ſollicitations de pluſieurs perſonnes, qui m'ont conſeillé plus d'une fois de donner au Public une Edition compléte de tous ces divers Traitez; & j'ay fait imprimer les trois autres qui reſtoient, à ſçavoir le Diſcours du Mouvement Local, la Statique, & les deux Machines pour les Quadrans : j'aurois mêmes commencé plutôt, ſans la difficulté

que j'ay euë à trouver un bon Graveur en bois. Et d'autant que ces trois derniers Traitez appartiennent aux Mathématiques, je les ay joints aux Elemens de Geometrie, que j'ay mis à la tête, comme en effet ils en doivent faire l'entrée. De plus, j'ay réduit le tout en ſorte, que ces quatre piéces ne feront enſemble qu'un ſeul volume, au lieu de quatre qu'elles faiſoient dans l'Edition de Paris : en

quoy

quoy l'on n'aura plus à craindre d'égarer quelqu'un de ces petits Ouvrages, comme il pourroit arriver s'ils étoient ſéparez. Et ce qui ſera encore d'une autre commodité au Public, c'eſt que ce volume ne coûtera guéres plus qu'un ſeul des quatre de Paris. Pour ce qui eſt du Diſcours de la connoiſſance des Bêtes, comme c'eſt une matiere qui n'a pas un rapport ſi immediat aux Mathématiques,

on l'achétera séparément. J'attens cependant du Public un bon succès de cette Edition? aprés quoy j'ay dessein de produire encore d'autres Ouvrages sur ces sortes de Sciences, & qui ne seront pas d'une moindre utilité.

CATA-

CATALOGUE

Des Livres qui ſe trouvent chez

ADRIAN MOETJENS.

A. B. C. d'un ſoldat ; ou remarques ſur le gouvernement des Places, 12
Academie de l'épée par Tibault, fol.
L'Art de l'homme d'épée, ou le Dictionnaire du Gentilhomme, 12
---de fortif. par Millet de Chales, 12
Architecture Militaire par St. Julien, 8
Arithmetique de Claircombe, 12
--- familier qui enſeigne d'apprendre ſans maitre par Binet, 12
Art des Armées Navales par Hoſte, fol.
--- d'Artillerie par Siniowiez, fol.
Blondel Nouvel. maniere de fortif. 12
--- L'art de jetter les bombes, 12
--- Calendrier Romain, 12
La Coſmographie aiſée, 12
Cabinet d'Architecture Peinture Schulpture & Graveure, 3 vol. 12
Cherubin Dioptrique Oculaire, fol.
-- Viſion Parfaitte, fol.
Cours de Mathematique d'Ozanam, 5 vol., 8
Dictionnaire de la marine, 8
Directeur des fortifications par Vauban, 12

Dic-

Dictionnaire Mathematique d'Ozanam, 4
--- Geographique par Baudrand, 4
Elemens d'Euclide par Millet, 12
--- de Geometrie du P. Royal, 12
--- de Mathematique par Preſtet, 2 vol. 4
--- d'Algebre par Ozanam, 8
Effets de la force de la Contiguité des Corps par Cherubin, 12
Les Fonctions des Officiers, 12
Les Fortifications de Vauban, 8
--- de Dogen, folio
--- Stevin, folio
--- Goldman, folio
--- Freitagh, folio
--- de Fournier, 12
--- de Pagan, 12
--- d'Ozanam, 8
--- de Cochoorn, 8
Geometrie Francoiſe par Beaulieu, 8
--- Pratique par Ozanam, 12
--- Pratique par Mallet, 4 vol., 8
Geographie de du Pleſſis, 3 vol., 12
--- de la Croix, 5 vol., 12
--- d'Audiffret, 3 vol. 12
--- Francois ou le Theatre du Monde, 12
Goudart Metamorphoſe Naturelle ou Hiſtoire des inſectes, 3 vol., 8
Geographie de Sanſon, 4

--- de du Val, 12 2 vol.
--- du P. l'Abbe, 12
--- de Robbe, 12 2 vol.
Grotius du Droit de la paix & de la guerre, 12 3 vol.
Hartſoecker Conjectures Phyſiques, 2 vol. 4
L'Hydographie ou la Theorie de la Navigation par Fournier, fol.
La Hire Aſtronomia, 4
Le Maréchal de Bataille de Loſtelneau, folio
Nouvelle maniere de forrifier, 12
Obſervations ſur les Cometes, 4
Oeuvres poſthumes de Rohault, 12. 2 vol.
--- de Troye de l'Ancieneré des fortifications, 12
Parfait Geographe, ou L'Art d'aprenla Geographie, par le Cocq, 2 vol. 12
Perſpective Curieuſe de Niceron, folio
Phyſique de Rohault, 2 vol., 12
Pluvinel inſtructions pour monter à Cheval, fol
Principes d'Architecture Schulpture & Peinture par Felibien, 4
--- de la Geographique, 12
Pratique des fortifications par Ango, 8
Pilote de l'onde vive, ou le ſecret du flux

flux & reflux de la Mer, 12
Principes de l'art militaire par Gamaliel, 12
Projet d'une nouvelle Mechanique, 4
Recueil des Ordonnances Militaires de Sa Majeste Britanique & de L. H. P., 8
Remarques de Mr. Rolle, sur le systeme General des Tangentes, 4
Sentimens des plus habiles Peintres sur la Pratique de la Peinture & Sculpture par Testelin, fol.
La Science militaire, 12
Traité des Moyens de rendre les Rivieres Navigables, 8
--- des Migniatures, 12
--- de Perspective, où sont contenus les fondemens de la Peinture, 8
--- des Sections du Cone, 8
--- de Physique par Rohault, 2 vol., 8
--- de la Poudre de Projection, 4
--- de Mecanique par la Hire, 12
Table de Sinus par Schoten, 12
--- par Vlac, 8
--- par Ozanam, 8

Le même Libraire vend encore toutes sortes d'autres Livres François, & des Cartes Geographiques. Le tout à juste prix.

ELEMENS
DE
GEOMETRIE,

Où

Par une methode courte & aisée l'on peut apprendre ce qu'il faut sçavoir d'Euclide, d'Archimede, d'Apollonius, & les plus belles inventions des anciens & des nouveaux Geometres.

Par le R. P. IGNACE GASTON PARDIES, *de la Compagnie de* JESUS.

CINQUIE'ME EDITION.

BIBLIOTECA NAZIONALE - VITTORIO EMANUELE III - NAPOLI

Suivant la Copie de Paris.
A LA HAYE,
Chez HENRI DU SAUZET.

M. DCC. XV.

A

MESSIEURS DE L'ACADEMIE ROYALE.

MESSIEURS,

Mon deſſein n'eſt pas ſeulement de vous dedier cet Ouvrage, comme à de puiſſans Protecteurs; mais c'eſt de vous le preſenter comme à des Juges Souverains. Il eſt

vrai qu'en France nous n'avons point de cette ſorte de judicature que l'on voit à la Chine, où une Cour compoſée de ſçavans Mathematiciens, juge en dernier reſſort de tout ce qui regarde les Mathematiques, qui ſont en ce païs-là une des plus importantes affaires de l'Etat. Si les loix du Royaume ne vous ont point donné cette juriſdiction, vous l'avez, MESSIEURS, *par vôtre propre merite; & à conſiderer les perſonnes qui compoſent vôtre Societé, nous pouvons dire que ce n'eſt pas ſeulement une aſſemblée de ce qu'il y a de plus habiles hommes en Europe; mais que c'eſt une Cour ſouveraine, dont les jugemens peuvent paſſer pour autant d'Arrêts parmi les Sçavans. Que peut-on dire, quand on voit ce grand édifice qui s'éleve avec tant de magnificence, ſinon que c'eſt un Palais qu'on bâtit pour un nouveau Tribu-*

Tribunal, & que le Roi qui ſurpaſſe les Empereurs Chinois dans la ſtructure de ce bâtiment, veut peut-être imiter leur politique dans l'érection de cette nouvelle Compagnie? Vous ſçavez, MESSIEURS, *que le Tribunal des Mathematiques de la Chine ſe tient ordinairement dans deux Obſervatoires, qui ſont tout auprès des deux Villes Imperiales. Ceux qui nous en ont fait la deſcription, nous diſent qu'on ne voit rien en Europe de comparable, ſoit pour la magnificence du lieu, ſoit pour la grandeur des machines de bronze qui ſont faites depuis ſept cens ans, & qui étant expoſées depuis pluſieurs ſiécles ſur les plate-formes de ces grandes tours, ſont encore auſſi entieres & auſſi nettes, que ſi elles ne faiſoient que de ſortir de la fonte. Les diviſions en ſont trés-exactes, la diſpoſition trés propre à obſerver, tout l'Ouvrage trés-délicat: en un mot*

mot il ſembloit que la Chine inſultoit à toutes les autres Nations, comme ſi avec toute leur ſcience & avec toutes leurs richeſſes elles ne pouvoient produire rien de ſemblable. Il faloit un Roi comme le nôtre pour réparer l'honneur de l'Europe; & il faloit des perſonnes comme vous, MESSIEURS, *pour employer ſi à propos la magnificence d'un ſi grand Prince, & pour faire connoître à toute la terre que la France, ſous la conduite de nos Miniſtres, ſçait porter les choſes au de-là de tout ce que peuvent entreprendre toutes les autres Nations du monde. Ce ne ſont pas ſeulement les murailles de ce ſuperbe édifice qui me font parler de la ſorte; ceux qui aiment les lettres auront encore plus de ſujet de benir le Gouvernement preſent, quand on verra executer ces grands deſſeins que vous m'avez fait l'honneur de me communiquer. Et certainement l'application avec laquel-*

laquelle vous vous occupez continuellement à faire des experiences de Phyſique, à polir les Arts, à enrichir les Mathematiques de vos nouvelles découvertes, feront voir bien tôt que jamais les Arts & ces belles Sciences n'ont été au point de perfection où vous les allez mettre. Je ne compte pas ici les deſſeins particuliers que pluſieurs de vous ont bien avancez touchant l'Architecture, les Cartes de Geographie, la connoiſſance des Plantes, l'Anatomie, le Mouvement, l'Optique & l'Aſtronomie. Je ne compte pas non plus cette belle Obſervation qui va paroître en public touchant la grandeur de la Terre. A juger par l'excellence des inſtrumens dont l'Auteur s'eſt ſervi, par ſon induſtrie à les manier, par la juſteſſe de toutes ſes operations, & par la connoiſſance parfaite qu'il a de la Geometrie, on eſt déja trés-perſuadé

que ce doit être un ouvrage accompli. Tout cela, MESSIEURS, *& pluſieurs autres choſes que je paſſe, font voir que vous étes en effet nos Juges, & que vous avez droit de prononcer ſur nos Sciences. Agréez donc cet aveu public que je fais; & puiſque l'integrité des Juges les plus ſeveres ne nous empêche pas de les ſolliciter quelquefois, ſouffrez qu'en vous preſentant cet Ouvrage, je vous le recommande, & que pour vous porter à le traiter favorablement, je vous aſſeure qu'il vient d'une perſonne qui a pour vous tout le reſpect imaginable. C'eſt,*

MESSIEURS,

Vôtre trés-humble & trés-obéïſſant Servitcur,

PARDIES.

PRE-

PREFACE.

CEux qui compareront la petiteſſe de cet Ouvrage avec la grandeur de ſon tître, ſeront peut-être d'abord rebutez par la diſproportion qui paroît entre l'un & l'autre ; & il y a ſujet de craindre qu'ils ne prennent toutes ces promeſſes ſi extraordinaires, que pour des expreſſions trop hardies d'une perſonne qui s'engage aiſément à faire ce qu'elle ne ſçauroit exécuter : mais je les ſupplie de vouloir un peu ſuſpendre leur jugement, & de conſiderer qu'on ne donne ici que la moitié de ces Elemens, & que des ſeize livres qu'ils doivent contenir, on n'en publie maintenant que neuf, parce que les autres expliquant ce qu'il y a de plus profond & de plus relevé dans les inventions extraordinaires de la Geometrie, ne ſont pas ſi neceſſaires à ceux qui veulent commencer à apprendre cette Science. Cependant, dans ces premiers livres, on ne laiſſe pas de traiter ce qu'il y a de beau dans les quinze livres d'Euclide, & outre cela, ce qu'Archimede a démontré de la quadrature du cercle, les Lunes d'Hippocrate, les

Logarithmes, les Sinus, & quelques autres choſes de cette nature. On y verra les proprietez merveilleuſes des nombres qu'Euclide a demontrées dans le ſeptiéme, le huitiéme & le neuviéme de ſes Elemens. On y apprendra la démonſtration des *Grandeurs incommenſurables*, qui eſt peut-être l'effort le plus grand dont l'eſprit humain ſoit capable, puiſqu'allant foüiller juſques dans la poſſibilité des choſes, il découvre avec tant de clarté ce qui eſt & ce qui n'eſt pas ; & que dans la multitude infinie des comparaiſons qu'il regarde toutes comme poſſibles entre deux grandeurs, il démontre avec une aſſûrance inébranlable, que Dieu même n'en voit pas une capable de fournir une commune meſure de ces deux grandeurs. Mais ſi cette démonſtration eſt belle, il faut avoüer qu'elle eſt bien difficile : ceux à qui nous avons l'obligation d'une ſi grande découverte, ne nous ont point montré d'autre route que celle qu'ils ont tenuë eux mêmes, ſoit qu'en effet ils n'en ayent point connu d'autre, ſoit qu'ils ayent voulu par là nous faire experimenter une partie de leur peine, & nous faire goûter en même tems avec d'autant plus de plaiſir les délices de ce nouveau monde, que nous aurons eû plus de peine à y parvenir. Quoi qu'il en ſoit, ce chemin eſt ſi long & ſi plein de difficultez, qu'il ſe

trouve

trouve fort peu de perſonnes qui ayent ou aſſez de conſtance pour en ſupporter l'ennuy, ou aſſez de force pour en ſurmonter la fatigue. Je ne ſçai ſi j'oſerai dire que j'ai été aſſez heureux pour découvrir une nouvelle route. Ce ne ſeroit pas une fort grande loüange pour moi : un matelot aventurier eſt quelquefois plus heureux à faire quelque nouvelle découverte, que le plus ſage Pilote, & le hazard fait trouver même dans la tempête, ce qu'on n'auroit ſceu découvrir avec toute la connoiſſance que l'on pourroit avoir de la Marine. Il ſe pourroit faire auſſi que courant comme j'ai fait ces vaſtes mers de la Geometrie, le hazard m'auroit fait rencontrer une route nouvelle & inconnuë aux grands hommes qui m'ont précedé. Je ne prétens pas néanmoins m'attribuër cette bonne fortune; mais je puis bien dire du moins que la route que je tiens pour aller aux Incommenſurables eſt trés-courte & trés-aiſée, & que pour peu d'attention que l'on veüille apporter à la lecture de quatre ou cinq petites pages, on comprendra parfaitement une choſe que trés-peu de perſonnes, même de ceux qui ſe mêlent de Geometrie, ſont capables d'entendre.

Aprés cela je traite de diverſes ſortes de progreſſions, & j'inſiſte particulierement ſur les deux plus celebres, qui ſont la Geo-

metrique & l'Arithmetique; & les comparant l'une avec l'autre, je traite des Logarithmes, & j'en fais voir l'artifice par le moyen d'une ligne geometrique, qui ſera trés-utile pour la réſolution des Problemes d'Algebre de toutes ſortes de dimenſions. C'eſt cette ligne avec laquelle j'ai quarré autrefois l'Hyperbole; & ce qu'un de mes amis m'a fait voir depuis peu dans le ſçavant Journal d'Angleterre, touchant ce qui a été publié ſur cette matiere par de trés-ſçavans Geometres, ne m'a point ſurpris, & même cela m'a fait penſer, que ces Meſſieurs n'avoient pas voulu nous communiquer tout ce qu'on pourroit dire ſur ce ſujet. Je finis cette premiere partie par la pratique de la Geometrie; ce qui devroit faire le dernier livre de tous ces Elemens. Outre les operations les plus faciles & les plus communes, j'y donne les principes pour meſurer les grandeurs & les diſtances des lieux inacceſſibles, pour faire la carte d'une Place ou d'une Province; pour trouver les ſinus, les tangentes, & les ſecantes de tous les angles; & enfin pour avoir la connoiſſance de tout ce qui appartient à cette partie, que l'on appelle la Geometrie pratique.

Après cela je donnerai dans tout autant de livres, l'Algebre, les Sections Coniques, les Spheriques, & la Statique; mais

ſur

ſur tout j'établirai cinq ou ſix regles générales, deſquelles enſuite, comme par des corollaires, on tire la démonſtration d'une infinité de propoſitions qui paſſent pour grandes dans la Geometrie. C'eſt-là qu'on trouvera la nature & la meſure des eſpaces aſymptotiques, dont la connoiſſance eſt la choſe du monde la plus admirable, & qui fait voir le plus clairement la grandeur & la ſpiritualité de nôtre ame, puiſque par la ſeule lumiere de ſon eſprit, penetrant au de-là de l'infini, elle découvre ſi clairement des choſes, que nulle experience ſenſible ne lui peut apprendre, & qu'aucune puiſſance corporelle ne ſçauroit ſeulement appercevoir. Ces eſpaces ſont d'une étenduë actuellement infinie, compris entre deux lignes, qui étant prolongées à l'infini, ne ſe rencontrent jamais; d'où leur vient le nom d'Aſymptotes. Cependant on démontre que ces eſpaces infinis en longueur, ſont néanmoins égaux à un cercle ou à une autre figure déterminée: de ſorte que l'infini même, tout immenſe & tout innombrable qu'il eſt, ſe réduit néanmoins au calcul & à la meſure de la Geometrie, & que nôtre eſprit, encore plus grand que lui, eſt capable de le comprendre. De toutes les connoiſſances naturelles que l'homme peut acquerir par ſon propre raiſonnement, ſans doute la plus

admirable eſt cette comprehenſion de l'infini : & je ne voy rien de plus propre à nous convaincre de l'exiſtence de nôtre ame, & à nous faire reconnoître, qu'outre la faculté materielle que nous avons d'imaginer par le moyen des organes ; nous en avons une toute ſpirituelle pour penſer & pour raiſonner, que le plus grand de tous les Philoſophes appelle *une puiſſance indépendante des organes, ſeparée de la matiere, & venant d'ailleurs que du corps.* En effet, quelque effet que nous faſſions pour imaginer l'infini, nous n'en viendrons jamais à bout ; & tandis que nous nous en tiendrons à la ſeule imagination, nous pourrons bien nous figurer un eſpace d'une vaſte étenduë, mais il ſera toûjouts borné : parce que l'imagination étant à proprement parler, une puiſſance corporelle, qui ne nous repreſente rien que par des fantômes & par des images ſenſibles, doit être elle-même, comme le corps, bornée dans ſes repreſentations. Et comme un tableau ne ſçauroit repreſenter à nos yeux une étenduë actuellement infinie, à cauſe que ce qui eſt borné dans un certain eſpace ne peut contenir ce qui n'a point de bornes ; auſſi l'imagination n'étant qu'un tableau qui nous repreſente des images à la verité bien ſubtiles, mais toûjours materielles, ne ſçauroit nous faire voir que des choſes corpo-

corporelles & limitées, toute l'immenſité de l'infini ne pouvant être contenuë dans les bornes d'une peinture corporelle. L'imagination ne peut donc atteindre juſques là, que de nous repreſenter l'infini. Mais d'ailleurs la démonſtration que nous faiſons de la nature & des proprietez de cette immenſe & infinie étenduë aſymptotique, nous convainc également que nous avons dans nous une faculté capable de nous repreſenter cette étenduë infinie. Car comme afin de meſurer avec la regle & le compas une figure repreſentée ſur du papier, il faut que j'aye cette figure preſente à mes yeux & à ma main, afin qu'appliquant l'inſtrument à ſes angles & à ſes côtez, je puiſſe en prendre toutes les dimenſions, & en déterminer ainſi la grandeur; de même afin que par la regle de ma raiſon je prenne les meſures de cet eſpace aſymptotique, il faut que j'en aye une idée intimement preſente à mon eſprit; & que ce même eſprit s'appliquant, pour ainſi dire, à cette idée & à cette figure interieure, il en prenne les dimenſions, en détermine la grandeur, & en démontre toutes les proprietez. Il faut donc reconnoître que nous avons en nous des idées & des repreſentations claires & diſtincte d'une étenduë infinie; & que par conſequent cette faculté qui nous repreſente ainſi ce que nul corps ne peut repreſen-

preſenter, eſt une puiſſance purement ſpirituelle & diſtincte de la matiére: de ſorte que la Geométrie, par une ſeule démonſtration, prouve également une des plus admirables proprietez de la nature, & en même tems une des deux plus importantes veritez de la Morale.

Oſerai-je paſſer encore plus avant, & dire que dans cette même démonſtration on trouve auſſi la preuve invincible de l'exiſtence de Dieu? Je ſçai que la nature divine eſt un abîme de lumiere, qui ſe répand par tout, & qui ſe fait ſentir aux eſprits les plus aveugles & les plus ſtupides: mais je ſçai auſſi juſqu'à quel point eſt allée l'impieté des libertins, qui ne pouvant réſiſter à leurs propres convictions, ni ſe répondre à eux-mêmes, tâchent d'éluder au dehors les démonſtrations des autres, en ſe retranchant dans l'embarras de l'éternité; & ils penſent être fort à couvert dans cette multitude infinie de cauſes dépendantes, & trouver toujours lieu de fuïr dans la ſuite éternelle de diverſes productions. Mais la Geométrie, par un exemple manifeſte des aſymptotes, démontre invinciblement, que même dans cette prétenduë ſuite des cauſes ſubordonnées & dépendantes les unes des autres à l'infini, il faut neceſſairement en venir à une premiere nature, qui concourant avec toutes

ces

ces cauſes particuliéres, & correſpondant à tous les tems, ſoit elle-même infinie & éternelle, & qui ne produiſant toute ſeule aucune de ces cauſes ſans le concours & ſans la détermination des autres, ſoit néanmoins la cauſe générale qui produit & qui conſerve toutes choſes.

Peut-être, après tout, qu'on penſera que je mets ici les choſes en abregé ſeulement, & que cette Geométrie pourra bien ſervir de memoires à ceux qui ſçauront déja cette ſcience, mais non pas d'inſtruction à ceux qui la veulent apprendre. Je déclare que cela eſt bien éloigné de mon intention, qui n'a jamais été de faire un abregé: j'ai toujours prétendu faire une Geométrie qui pût ſervir à ceux qui commencent, & où ceux même qui n'ont jamais ouï parler de Mathematiques, puiſſent apprendre en fort peu de tems, non ſeulement ce qui eſt le plus neceſſaire dans la Geométrie, mais encore ce qu'il y a de plus relevé. Je ſçai qu'en cette matiere les livres les plus courts ne ſont pas toujours les plus clairs; & parmi le grand nombre de ceux qui ont voulu nous faciliter la lecture & l'intelligence d'Euclide, pluſieurs en ont bien amoindri le volume; mais tous n'ont pas pour cela accourci le tems qu'il faut pour le comprendre. Entre tous les Commentateurs, le plus long, à mon avis, eſt Clavius,

vius, & le Pere Fournier eſt le plus court; je ſuis néanmoins perſuadé qu'il faut plus de tems pour entendre paſſablement Euclide dans le Pere Fournier, que pour le comprendre dans Clavius : tant il eſt vrai que dans la Geométrie on ne doit pas meſurer le tems de l'étude par la grandeur ou la petiteſſe du Volume. Ainſi dans le deſſein que j'ai eu de donner le moyen d'apprendre cette Science avec plus de facilité qu'il me ſeroit poſſible, je ne me ſuis pas tant étudié à être court dans les écrits, qu'à me rendre intelligible dans la façon de proceder; & ſi ce Volume paroît fort petit, cela ne vient pas tant de la briéveté des démonſtrations particulieres, que de la facilité de la methode génerale. Car il faut remarquer qu'une des choſes qui rendent difficile & ennuyeuſe la lecture d'Euclide & des Auteurs ordinaires, c'eſt que dans l'exactitude rigoureuſe qu'ils ont de ne laiſſer paſſer ſans démonſtration rien de ce qui ſe peut démontrer, pour facile qu'il paroiſſe d'ailleurs; il arrive ſouvent que ce qui eût été clair, ſi on ſe fût contenté de le propoſer à l'eſprit, tel qu'il paroît naturellement, devient difficile & embarraſſé, lors qu'on veut le réduire à une démonſtration réguliere. De plus, il ſe trouve ſouvent, que pour démontrer une propoſition importante, Euclide employe

une

une trés-grande ſuite de propoſitions, qui ne ſervent proprement à rien, qu'à prouver cette principale propoſition. Si donc par la ſeule expoſition on vient à faire appercevoir la verité, ſans ſe mettre en peine de démontrer ce de quoi on eſt pleinement convaincu, & ſans employer des diſcours qui ne ſemblent ſervir qu'à nous faire deſapprendre ce que nous ne ſçaurions ignorer, on s'épargnera bien de la peine. De même, ſi l'on peut tout d'un coup démontrer ces propoſitions capitales & importantes d'Euclide, ſans employer cette longue ſuite de démonſtrations, & ſans tant de préparatifs, on aura ſans doute le moyen de retrancher bien des choſes inutiles: c'eſt ce que je penſe avoir fait en pluſieurs endroits, démontrant dans une ſeule propoſition ce qui n'eſt ordinairement prouvé que par cette ſuite ennuyeuſe d'autres propoſitions. Un autre moyen d'abreger, dont je me ſuis ſervi, c'eſt de réduire les choſes ſous de certains principes généraux; ce que j'ai fait non ſeulement dans ce livre, où par cinq ou ſix regles univerſelles je démontre une infinité de grandes propoſitions, mais auſſi en beaucoup d'autres endroits, comme lorſque traitant des Sections Coniques, je démontre les proprietez des quatre par quelqu'une des propriétez qui eſt particuliere

liere à une ſeule ſection. Par exemple, les conſiderant toutes ſous les propriétez de l'Ellipſe, je dis que le Cercle eſt une ellipſe, dont les deux foyers ſe touchent; que la Parabole eſt une ellipſe, dont les deux foyers ſont infiniment éloignez l'un de l'autre; & que l'Hyperbole eſt une ellipſe, dont les foyers ſont plus qu'infiniment éloignez: ce qui a un fort bon ſens, comme je l'explique en cet endroit.

Quelqu'un ſans doute trouvera mauvais que j'aye laiſſé la methode ordinaire de ranger les définitions, les principes & les propoſitions; & il croira peut-être que je fais tort à la Geométrie; de lui ôter ce qui l'a toujours fait paſſer pour la Science la plus exacte. Un autre me reprochera que j'ai encore gardé quelques vieilles façons de démontrer, après que les modernes, par cette politeſſe ſi propre au tems où nous ſommes, ont donné des démonſtrations bien *plus naturelles*, & ont fait voir la difference qu'il y a entre *éclairer l'eſprit*, & *le convaincre*. On me dira encore que je me ſuis negligé en beaucoup de choſes; que j'ai avancé pluſieurs propoſitions ſans les démontrer; que je cite ſouvent des endroits, qui ne prouvent pas directement ce qui eſt en queſtion; que je me ſers indifferemment de la *Converſe*, & de la propoſition même. A tout cela je répons

en

en un mot, que dans le deſſein que j'avois d'enſeigner la Geométrie avec toute la facilité poſſible, la voye que j'ai ſuivie m'a ſemblé la plus propre : ce qui ne m'empêchera pas néanmoins de profiter des avis que les perſonnes intelligentes auront la bonté de me donner.

Cependant, je m'apperçois, que faiſant profeſſion d'être fort court dans cet Ouvrage, je ſuis exceſſivement long dans la Préface. Ainſi je ne m'arrête pas à faire voir les grands avantages de la Geométrie ; je dis ſeulement, que ſi jamais elle a été de quelque utilité dans l'étude des Sciences naturelles, & dans la pratique des Arts, elle eſt maintenant de la derniere neceſſité pour l'un & pour l'autre. On ſçait à quel point on a porté dans nôtre ſiécle la perfection des Arts, & avec quelle penétration l'on va approfondir les matieres les plus cachées de la Phyſique. De la façon qu'on s'y prend aujourd'huy, la Geométrie eſt neceſſaire auſſi-bien que la Méchanique, qui n'eſt qu'une Geométrie appliquée au mouvement local, & ceux qui ont maintenant le plus de vogue, ſont inintelligibles, ſi l'on n'a ces deux connoiſſances. Pour ce qui eſt de la Méchanique, j'en ai donné une partie des Elemens dans un diſcours du Mouvement local, que je ne dois pas avoir honte d'avoüer pour mien ; &

j'eſpe-

j'eſpere qu'avec ce que je publie maintenant dans ce livre de Geométrie, on aura deux grands moyens d'entendre la Phyſique de ce tems, & d'en bien juger: & peut-être trouvera-t-on que ceux qui ont la réputation d'avoir établi leur Philoſophie ſur les fondemens de la Geométrie & des Méchaniques, ne ſont pas toûjours inébranlables; & que cela même qui a ſervi à faire valoir leur doctrine, ſervira à faire connoître leurs erreurs. Je veux encore avertir le Lecteur, que je ne prétens nullement vouloir paſſer pour Auteur de ce que je donne dans cet Ouvrage; j'ai pris de tous côtez ce qui m'a agréé: & ſi quelqu'un y trouve quelque choſe qu'il penſe être de ſon invention, ou de quelque autre, qu'il le prenne hardiment, & qu'il l'attribuë à ſon Auteur, j'y conſens volontiers, & je ne le lui conteſterai point. Que ſi par hazard il y rencontre quelque choſe qui ne ſe trouve point ailleurs, & qu'il veüille me l'attribuër, alors je le reconnoîtrai pour mien, de peur qu'il ne ſoit à perſonne.

AVIS

AVIS

A ceux qui veulent apprendre la Geométrie.

IL faut s'accoûtumer à conſiderer les figures en même tems qu'on lit. On y a de la peine au commencement; mais on y eſt rompu dans deux ou trois jours.

Il ne faut point ſe rebuter, ſi l'on trouve des choſes qu'on ne comprend pas d'abord; la Geométrie ne s'apprend pas auſſi aiſément qu'une hiſtoire.

Si après avoir leû avec attention une propoſition, on ne l'entend pas, il faut paſſer outre; on l'entendra peut-être dans la ſuite, ou du moins lors qu'après avoir tout parcouru, on recommencera à lire tout de nouveau. En fait de Geométrie, on ne comprend jamais bien les choſes à la premiére lecture.

Les nombres qui ſe trouvent entre des parentheſes, comme par exemple, (3.24.) marquent que ce qu'on dit en cet endroit eſt prouvé ailleurs, ſçavoir ici au troiſiéme livre, à l'article vingt-quatriéme: de ſorte que le premier chifre

chifre marque le livre, & les autres marquent l'article ; & il faut aller consulter ces articles-là, pour sçavoir la preuve de ce qu'on lit.

Quand on trouve des mots qu'on n'entend pas, il faut consulter la table qui est à la fin.

Il est bon d'avoir un Maître au commencement qui explique ces démonstrations ; & par ce moyen on apprend beaucoup plus aisément qu'on ne feroit de soi-même en lisant.

Si l'on veut se donner la peine de venir au College de Clermont, l'Auteur de ces Elemens continuera de les y expliquer publiquement les Lundis & les Vendredis.

On avoit esperé de pouvoir donner au plûtôt le reste de cette Geométrie ; mais l'on a été obligé d'en differer quelque tems l'impression, pour avoir le loisir de publier d'autres Traitez de Mathematique qui sont beaucoup plus necessaires. Aussitôt qu'on aura achevé la Statique, l'Optique, & les Quadrans, à quoi l'on travaille presentement, on imprimera tout de suite l'Algebre, les Sections Coniques, & tout le reste qu'on a promis, pour faire une Geométrie complete.

ELE-

ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des Lignes, & des Angles.

1. PAR le nom de *Quantité* nous entendons une choſe, qui étant comparée à une autre de même nature, peut être appellée plus grande, ou plus petite; égale, ou inégale: comme ſont l'Etenduë, le Nombre, la Peſanteur, le Temps, le Mouvement; & toutes ces choſes, en tant qu'elles ſe peuvent ainſi comparer, ſuivant le plus ou le moins, ſont l'objet de la Geometrie.

2. On s'arrête néanmoins à conſiderer particulierement l'Etenduë, comme celle qui peut ſervir d'exemple & de regle à meſurer toutes les autres Quantitez.

3. La quantité, qui a de l'étenduë ſeulement en longueur, ſans aucune profondeur, s'appelle *Ligne*: celle qui eſt étenduë en longueur & en largeur, s'appelle *Surface* ou *Superficie*: celle qui a de la longeur, & de la largeur, & de la profondeur, s'appelle *Corps* ou *Solide*.

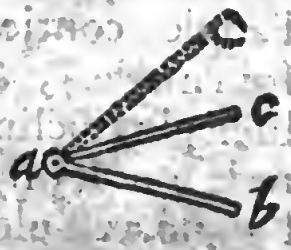
4. Le *Point* eſt un endroit de la Quantité, lequel on conſidere comme s'il n'avoit aucune étenduë, & qu'il fût indiviſible de tous côtez: ainſi les extrémitez, ou le milieu d'une Ligne, ſont des Points.

5. Il y a des lignes *Droites*, & des lignes *Courbes*: de même il y a des ſurfaces *Planes*, qui s'appellent *des Plans*: & des ſurfaces *Courbes*, qui ſont *Convexes* en dehors, comme le deſſus d'une voute, & *Concaves* en dedans, comme le deſſous d'une voute.

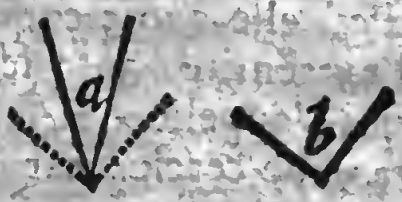
6. Lorſque deux lignes ſe touchent en un point, & vont enſuite en s'éloignant l'une de l'autre, il ſe fait entre ces lignes un *Angle*, qui s'appelle *Rectiligne* quand les deux lignes ſont droites, *a*: *Curviligne* quand elles ſont courbes, *b*: & *Mixte* quand l'une eſt courbe, & l'autre droite, *c*.

7. L'an-

7. L'angle eſt dit être d'autant plus petit, que les lignes qui le font, ſont plus inclinées l'une vers l'autre. Prenez deux lignes *a b* & *a c*, qui ſe touchent en *a*: ſi vous imaginez que ces deux lignes s'ouvrent comme un compas, en ſorte qu'elles demeurent toujours attachées en *a* comme par le clou du compas, tandis que l'extrémité *c* s'écarte de l'extrémité *b*; alors vous concevrez que plus ces extrémitez s'éloigneront mutuellement, plus auſſi ſe fera grand l'angle qui eſt entre deux: & au contraire, ſi vous approchez davantage ces extrémitez, vous ferez que les lignes ſeront plus inclinées, ou plus panchées l'une vers l'autre, & l'angle en ſera plus petit.

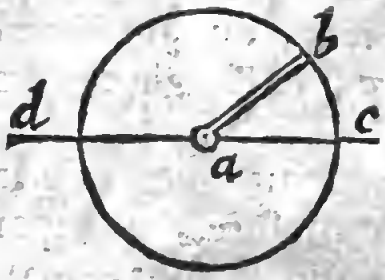


8. Il faut donc bien remarquer que la grandeur des angles ſe meſure, non par la longueur des lignes qui le font, mais par leur inclination. Par exemple, l'angle *b* eſt plus grand que l'angle *a*, quoi-que les lignes de *b* ſoient plus courtes: par ce qu'elles ne ſont pas ſi inclinées l'une vers l'autre, que le ſont les lignes de l'angle *a*; & pour le comprendre, on n'a qu'à s'imaginer que l'an-



gle *b* eſt poſé ſur l'angle *a*, comme on le voit par les lignes ponctuées, qui repreſentent l'angle *b*. Car pour lors on verra que l'angle *b* contiendra aiſément an dedans de ſoi l'angle *a*, & que les lignes d'*a* ſeront bien plus inclinées l'une vers l'autre, que ne le ſont les lignes de *b*; & qu'ainſi enfin l'angle *a* eſt plus petit.

9. L'angle ſe déſigne ordinairement par trois lettres, dont celle du milieu marque le point où les deux lignes ſe touchent, comme en la figure ſuivante, *b a c* marque l'angle fait par les deux lignes *b a* & *c a*, en ſorte que *a* eſt le point commun où les lignes ſe touchent.



10. Si nous imaginons une ligne *a b* attachée par le bout *a* au milieu de la ligne *d c*, & que de plus nous faſſions mouvoir cette ligne autour du point *a*; quand elle ſera revenuë au lieu d'où elle avoit commencé à ſe mouvoir, l'extrémité *b* aura décrit une ligne courbe, qui s'appelle *Cercle*, ou plûtôt *Circonference* de cercle: car, à proprement parler, le *Cercle* eſt tout l'eſpace renfermé dans cette circonference.

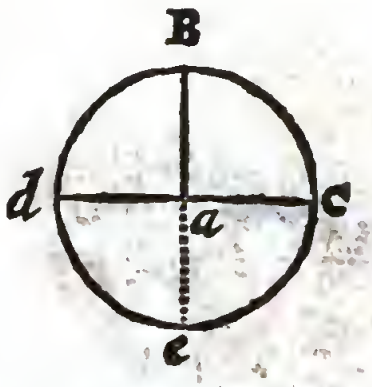
11. Une partie de la circonference s'appelle *Arc*, comme *c b*.

12. La

12. La ligne *d c* terminée par la circonference, s'appelle *Diametre*, qui partage le cercle en deux également, ce qui n'a pas besoin de preuve. Auſſi toute ligne droite qui ſera tirée par le *Centre*, c'eſt-à-dire, par le point *a*, partagera le cercle en deux parties égales, & ſera auſſi un autre diametre.

13. La ligne *a b*, ou *a c*, ou toute autre tirée du centre à la circonference, s'appelle *Rayon*, ou *Demidiametre*.

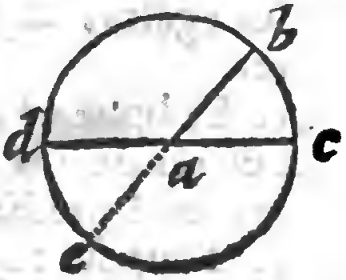
14. Tous les rayons ou demidiametres ſont égaux.



15. Quand l'extrémité *B* eſt également éloignée des deux extrémitez du diametre *c* & *d*, c'eſt-à-dire, quand *B* ſe trouve au milieu de la demi-circonference ; alors cette ligne *B a* fait deux angles, qu'on appelle *Droits*, qui ſont égaux de part & d'autre, l'un *B a c*, & l'autre *B a d*. Et ſi la ligne *B a* eſt prolongée au de-là vers *e*, elle fera quatre angles droits, & elle ſera un nouveau diametre, qui avec le premier partagera le cercle en quatre parties égales.

16. Alors les lignes ſont dites *Perpendiculaires* l'une à l'autre, *B a* à *d c*, & *d a* à *B e*.

17. Mais si *b* eſt plus proche de l'une des extrémitez du diametre que de l'autre; alors cette ligne eſt dite *Oblique*, & fait de part & d'autre deux angles inégaux, dont le plus petit s'appelle *Aigu*, *b a c*; & le plus grand s'appelle *Obtus*, *b a d*. Que ſi la ligne *b a* eſt prolongée juſqu'à *e*, elle ſera un nouveau diametre, & fera en deſſous deux nouveaux angles: de ſorte qu'il y aura en tout quatre angles, deſquels on appelle *Oppoſez par la pointe*, les deux qui ſe touchent ſeulement de la pointe comme *b a c*, & *e a d*, ou bien *b a d*, & *c a e*: mais ceux qui ont un côté commun, s'appellent *Angles de ſuite*; comme *d a b*, & *b a c*, ou bien *b a c*, & *c a e*, *&c.*



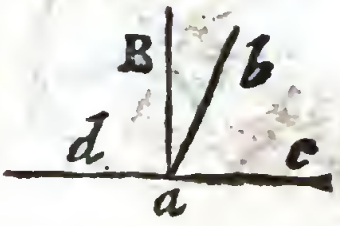
18. Les angles qui prennent des arcs égaux, ſont auſſi égaux. Comme ſi l'on prouve que l'arc *c b* eſt égal à l'arc *e d*, on aura auſſi prouvé que l'angle *c a b* eſt égal à l'angle *e a d*.

19. Ces deux angles qui ſont de ſuite, pris enſemble, ſont toûjours égaux à deux droits. Car comme la ligne *d c*, eſt diametre, & qu'elle coupe le cercle en deux également, les deux arcs *c b* & *b d* pris enſemble, ſeront égaux à la demi-circonference. Ainſi les deux angles *c a b*

&

& *b a d* pris enſemble, ſeront égaux à deux droits, puiſqu'ils rempliſſent le demi-cercle, comme les deux droits.

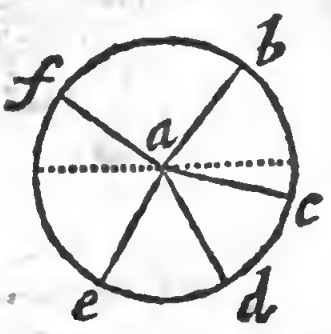
20. Ainſi cette propoſition eſt générale, qu'une ligne droite tombant ſur une autre ligne droite, fait les deux angles de ſuite ou droits, ou égaux à deux droits. Car ſi les lignes ſont perpendiculaires, comme *B a* ſur *d a c*, les angles ſont droits de part & d'autre (15) Que ſi la ligne eſt oblique, comme *b a* ſur la même *d c*, alors les angles ſont bien inégaux; mais de tout autant que l'obtus ſurpaſſe un droit, de tout autant auſſi l'aigu eſt ſurpaſſé par un autre droit. Ainſi la petiteſſe de l'un eſt récompenſée par la grandeur de l'autre.



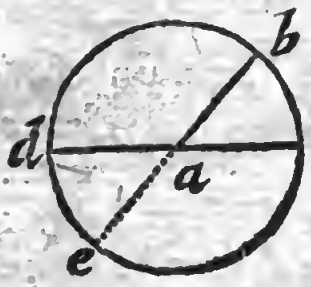
21. Si deux angles qui ont un côté commun, ſont égaux à deux droits, leurs autres côtez feront une ligne droite. Soient les angles *d a b* & *b a c* égaux à deux droits, je dis que la ligne *a d* avec la ligne *a c* fait une ligne droite; (fig. de l'art. 17.) ce qui eſt clair par ce qui a été dit. Car ſi du centre *a* on tire un cercle *d b c*, les deux arcs *d b*, *b c* ſeront égaux à la demi-circonference, puiſqu'on ſuppoſe que ces deux angles ſont égaux à deux droits. Ainſi les lignes *d a*, *a c* feront le diametre,

& par conſequent ſeront *en droite ligne*, *poſitæ in directum*.

22. Si d'un point donné *a* on éleve diverſes lignes *a b*, *a e*, *a f*, *a d*, *&c.* elles feront divers angles ; & tous ces angles enſemble, en quelque nombre qu'ils ſoient, ſeront égaux à quatre droits : car il eſt clair que tous ces angles rempliſſent le cercle dont ils diviſent la circonference en autant d'arcs *b f*, *f e*, *e d*, *d c*, *c b*. Ainſi tous ces arcs enſemble ſont égaux à quatre quarts de cercle, c'eſt-à-dire, que tous ces angles ſont égaux à quatre droits : car auſſi quatre angles droits rempliſſent le cercle.



23. Les angles *oppoſez par la pointe* ſont égaux entre eux. Soient deux lignes droites *d a c*, & *b a e*, je dis que l'angle *b a c*, eſt égal à l'angle *e a d* : car l'arc *c b*, avec l'arc *b d*, fait la demi-circonference, (12.) & de même l'arc *b d* avec l'arc *d e*, fait auſſi la demi-circonference : Donc l'arc *b c* eſt égal à l'arc *d e*, puiſque l'arc *b d* fait toûjours la même quantité, ſoit qu'on l'ajoûte avec l'arc *b c*, ou avec l'arc *d e*. Par même raiſon l'angle *d a b* eſt égal à l'angle *c a e*.

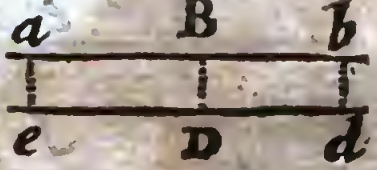


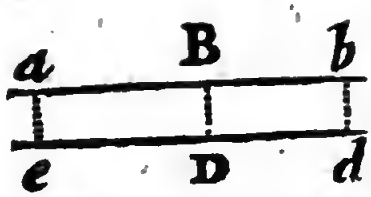
24. On

24. On divise toute la circonference du cercle en 360 parties égales, qui s'appellent *Degrez*, & chaque degré en 60. parties égales, qui sont les *Minutes*, & chaque minute en 60. *Secondes*, chaque seconde en 60. *Tierces*, & ainsi à l'infini. Et quand on veut déterminer la grandeur des angles, on compte les degrez qu'ils comprennent. Par exemple, quand on dit un angle de 90. degrez, on entend un angle droit, parce qu'un angle droit comprend la quatriéme partie de la circonference, laquelle contient 90. degrez, puisque toute la circonference en contient 360. dont la quatriéme partie est 90. De même un angle de 60. degrez est un angle qui fait les deux tiers d'un droit.

25. Les Minutes se marquent par un petit trait, comme une virgule qu'on met à côté du chifre : & les Secondes par deux de ces traits'' : les Tierces par trois''' : les Quartes par quatre, *&c.* comme 25. d. 32'. 43''. ce qui veut dire 25. degrez. 32. minutes, 43. secondes.

26. Deux lignes sont dites être *Paralleles*, quand elles sont par tout également éloignées l'une de l'autre. Les deux lignes *a b* & *e d* sont paralleles, si elles sont également éloignées en *a e*, & en *b d*, ou en *B D*, & en tout autre endroit.

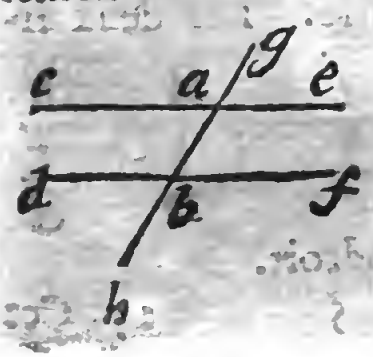




27. Cet éloignement ſe meſure par des perpendiculaires. Comme ſi du point *a* on s'imagine que la ligne *a e* tombe perpendiculairement ſur *e d*; & ſi de même *b d* tombe perpendiculairement ſur *d e*: nous concevrons naturellement que ſi ces deux perpendiculaires *a e*, *b d*, ſont égales, les deux lignes *a b*, *e d* ſeront également éloignées l'une de l'autre en ces deux endroits; cela eſt naturellement connu ſans autre preuve.

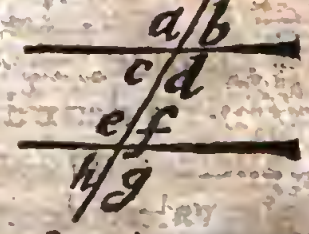
28. Deux lignes paralleles étant continuées à l'infini, ne viennent jamais à ſe toucher: car puiſqu'elles ſont toûjours également éloignées, on peut par tout tirer entre deux une perpendiculaire égale à *a e*, ou à *b d*: & par conſequent elles ne ſe touchent jamais.

29. Si une ligne coupe deux autres lignes paralleles, elle ſera également inclinée ſur l'une & ſur l'autre: & ſi une ligne coupant deux autres lignes, eſt également inclinée ſur l'une & ſur l'autre; ces deux lignes ſeront paralleles. Soient les deux lignes paralleles *c a e*, *d b f* coupées par la ligne *g a b h*: je dis que cette ligne *g a b h* eſt



eſt inclinée ſur *c a e*, de même que ſur *d b f*; c'eſt-à-dire, que l'angle *g a e* eſt égal à l'angle *g b f*. Ceci eſt naturellement connu pour peu d'attention qu'on y apporte. Car ſi l'angle *g a e*, par exemple, étoit plus grand, & que la ligne *a e* fut plus écartée d'*a g*, le point *e* de la ligne *a e* pancheroit vers *f*, puiſque *b f* ne s'écartetoit pas tant qu'*a e*; ainſi ces deux lignes, *a e*, & *b f* ne ſeroient point paralleles. De plus, ſi nous imaginons ces deux lignes comme les côtez d'une regle, nous pouvons conſiderer toute cette regle, comme une ligne indiviſible. Ainſi les angles *h b d* & *c a g* ſeront comme les *angles de ſuite* égaux à deux droits, (20.) & les angles *h b d* & *g a e* ſeront comme les deux angles *oppoſez par la pointe* égaux entre eux. (23.)

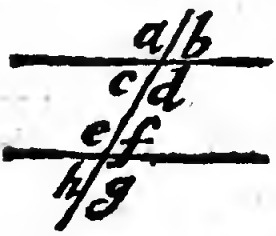
30. Lorſqu'une ligne conpe deux paralleles, il ſe fait huit angles, dont les quatre *a*, *b*: *h*, *g*, ſont *externes*, les autres ſont *internes*. Les angles *c* & *f*, ou bien *d* & *e*, ſont appellez *Alternes*: les angles *b* & *f*, ou bien *a* & *e*, ſont *alternativement oppoſez*: les angles *d* & *f*, ou bien *c* & *e*, ſont les *internes de même côté*.



31. Les angles alternes, & alternative-

ment opppoſez, ſont égaux entre eux, comme *b*, *f*, *c*, *h*, & *a*, *e*, *d*, *g*. (29)

32. Lorſqu'une ligne tombe ainſi ſur deux paralleles, elle fait les angles internes de même côté égaux à deux droits.



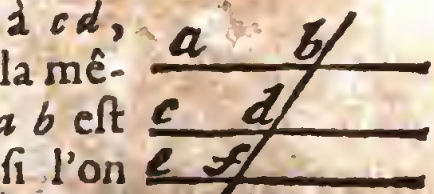
L'angle *d* avec l'angle *f* eſt égal à deux droits, parce que *f* eſt égal à *c*. (31.) Or *c* avec *d* fait deux angles droits : (20.) Donc auſſi *f* avec *d* fera deux angles droits, ce qu'il faloit démontrer.

33. Une propoſition eſt appellée *Converſe* d'une autre, quand aprés avoir tiré une concluſion de quelque choſe qu'on a ſuppoſée, on vient dans cette autre propoſition converſe à ſuppoſer ce qui avoit été conclu, & à en tirer ce qui avoit été ſuppoſé. Par exemple, ici nous diſons, ſi les lignes ſont paralleles, les angles *d* & *f* ſeront enſemble égaux à deux droits, où nous ſuppoſons que les lignes ſont paralleles ; & de là nous concluons : Donc les angles, *&c.* La *Converſe* ſe fera ainſi. Si les angles, *internes de même côté d* & *f* ſont égaux à deux droits, les lignes ſeront paralleles : ou aprés avoir ſuppoſé que ces angles valent deux droits, nous concluons que les lignes ſeront paralleles.

34. Les *Converſes* en cet endroit ſont veritables, ſçavoir que ſi une ligne coupant

pant deux autres lignes fait les angles alternes égaux, ces deux lignes ſont paralleles.

35. Si deux lignes ſont paralleles à une troiſiéme, elles le ſeront entre elles. Soit la ligne *a b* parallele à *c d*, & *e f* parallele auſſi à la même *c d*, je dis que *a b* eſt parallele à *e f*: car ſi l'on tire une ligne *b d f* qui les coupe toutes trois, l'angle *b* ſera égal à l'angle *d*, (31.) & de même l'angle *f* ſera égal à l'angle *d*: (31.) Donc l'angle *b* eſt égal à l'angle *f*, parce que c'eſt un principe, que ſi deux choſes ſont égales à une troiſiéme, elles ſont égales entre elles. Puis donc que l'angle *b* eſt égal à *f*, il s'enſuit que la ligne *a b* eſt parallele à *e f*. (34.)



LIVRE SECOND.

Des Triangles.

1. UNE *Figure* eſt un eſpace renfermé de toutes parts. Si les lignes qui la terminent ſont droites, elle s'appelle figure *Rectiligne*; ſi elles ſont courbes, elle s'appelle *Curviligne*; & ſi elles ſont en partie droites, & en partie courbes, la figure s'appelle *Mixte*.

2. Il y a des figures *Planes*; qui ſont ſur une ſurface plane, & des figures *Solides*, qui ſont un corps avec trois dimenſions. On parle ici ſeulement des figures planes.

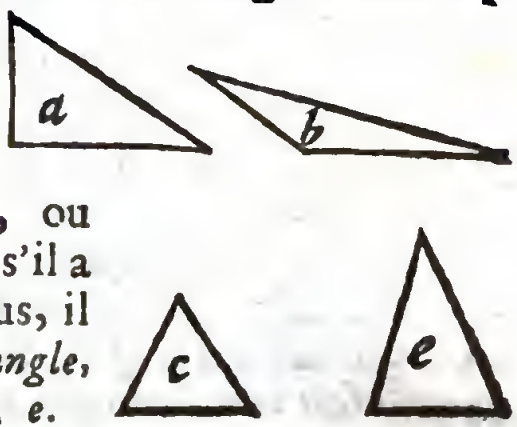
3. Toutes les lignes qui renferment la figure priſes enſemble, ſont la *Circonference*, ou le *Perimetre*, ou le *Circuit* de la figure.

4. De toutes les figures planes curvilignes, ou mixtes, on ne conſidere proprement dans la Géometrie ordinaire que le cercle, ou une partie de cercle, terminée d'un côté par un arc, & de l'autre par une ou pluſieurs lignes droites.

5. Parmi les rectilignes, les plus ſimples figures ſont les *Triangles*, qui ſont terminées par trois lignes, leſquelles font trois angles.

6. Un

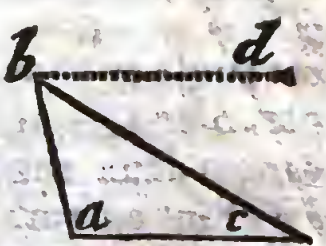
6. Un triangle, qui a un angle droit, s'appelle *Triangle rectangle a*: s'il a un angle obtus, il s'appelle *Obtusangle*, ou *Amblygone*, *b*: s'il a trois angles aigus, il s'appelle *Acutangle*, ou *Oxygone*, *c*, *e*.

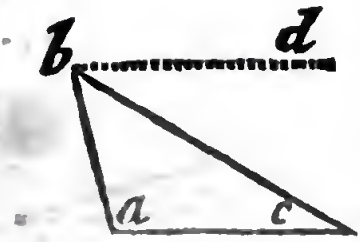


7. Quand le triangle a tous les trois côtez inégaux, il s'appelle *Scalene*, *a*, *b*: s'il a deux côtez égaux, il est *Isoscele*, *e*: si tous les trois côtez sont égaux, il est *Equilateral*, *c*.

8. Si l'on prend deux côtez du triangle, on peut les appeller *Jambes*, & le troisiéme côté pour lors s'appellera *Base*. Tout côté peut être pris pour Base.

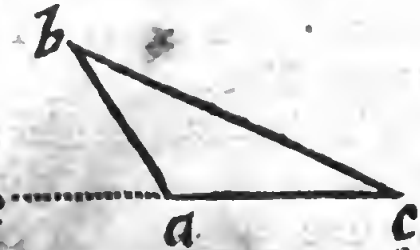
9. En tout triangle les trois angles ensemble sont égaux à deux droits. Soit le triangle *a b c*, je dis que l'angle *a*, plus l'angle *c*, plus l'angle *a b c*, valent deux droits: car si nous imaginons une ligne *b d* parallele à *a c*, ces deux lignes paralleles seront coupées par la troisiéme *b c*; & par consequent les angles alternes seront égaux, c'est-à-dire, que l'angle *c* est égal à l'angle *c b d*. (1. 31.) De plus, la ligne *b a* tombant





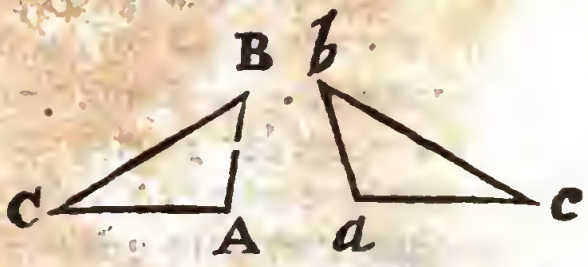
bant ſur les paralleles *b d* & *a c*, elle fait les angles internes de même côté égaux à deux droits (1. 32.) c'eſt-à-dire, que l'angle *a b d*, plus l'angle *a*, ſont égaux à deux droits. Or l'angle *a b d* eſt compoſé de deux angles, dont l'un eſt *a b c*, (qui eſt un des trois du triangle) & l'autre eſt *d b c*, que j'ai fait voir être égal à l'angle *c*: Donc auſſi ces trois angles *a b c*, plus *c*, plus *a* valent deux droits; ce qu'il faloit démontrer.

10. Si l'on prolonge la baſe d'une triangle, l'angle externe eſt égal aux deux internes oppoſez. Soit le triangle *a b c*, & qu'on prolonge le côté *c a* vers *e*, il ſe fait un angle en dehors *b a e*, qui s'appelle l'angle *externe* du triangle. Or je dis que cet angle externe *b a e* eſt égal aux deux angles *b* & *c*, qui ſont les *internes* oppoſez, car ces deux angles *b* & *c* avec le troiſiéme *b a c* font enſemble deux droits (par la précedente) & de même, ce troiſiéme angle *b a c* avec l'angle *b a e*, fait auſſi deux droits: (1. 20.) Donc les angles *b* & *c* ſont tous deux autant que l'angle *b a e*; ce qu'il faloit démontrer.



11. Si

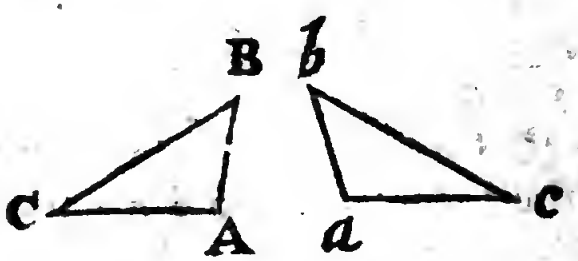
11. Si un triangle ABC a deux côtez AB & AC, égaux aux deux côtez ab, ac d'un autre triangle; & si de plus l'angle A est égal à l'angle a: je dis que le troisiéme côté BC sera égal à bc, & l'angle B à l'angle b, & C à c, & tout le triangle ABC à tout le triangle abc. Car si nous imaginons que le triangle abc soit posé sur ABC, en sorte que le côté ab soit précisément sur AB qui lui est égal, le côté ac tombera aussi sur AC, puisqu'on suppose que l'angle a est égal à l'angle A; & ainsi le point c tombera sur C, puisque ac est égal à AC: Donc aussi bc tombera sur BC, & par consequent lui sera égal; & de même l'angle c sera égal à C, & b à B, & tout le triangle à tout le triangle, puisque tout se répond si bien, que rien du triangle de dessus ne passe au delà de celui de dessous.



12. Les figures qui s'ajustent ainsi, & se correspondent parfaitement quand elles sont mises l'une sur l'autre, s'appellent figures *congruës*, *quæ mutuo sibi congruunt*; & c'est une maxime générale. *Quæ mutuo sibi congruunt, æqualia sunt*: *les choses qui étant*

étant ainſi miſes l'une ſur l'autre, ſe correſpondent parfaitement, ſont égales.

13. La converſe auſſi de la propoſition précedente eſt veritable ; ſçavoir, que ſi un triangle a tous ſes trois côtez égaux aux trois côtez d'un autre triangle, tous les angles de l'un ſeront auſſi égaux aux angles de l'autre, & tout l'eſpace que contient un triangle, ſera auſſi égal à l'eſpace que contient l'autre triangle : comme ſi *AB* eſt égal à *ab*, & *AC* à *ac*, & *BC* à *bc* : je dis que l'Angle *A* ſera égal à l'angle *a*, & *B* à *b*, & *C* à *c*, & tout le triangle *ABC* à tout le triangle *abc* ; ce qui n'a pas beſoin d'aurre preuve.



14. Si l'angle *A* eſt égal à l'angle *a*, & l'angle *B* à l'angle *b*, & le côté *AB* au côté *ab*, le côté *AC* le ſera auſſi au côté *ac*, & *BC* à *bc*, & tout le triangle *ABC* à tout le triangle *abc* : cela eſt aiſé à prouver par la precedente.

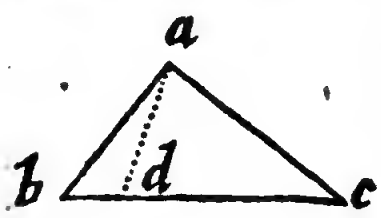
15. En tout triangle Iſoſcele, les deux angles qui ſe font ſur la baſe par les jambes égales, ſont égaux entre eux. Soit le triangle *abc*, dont la jam-

jambe *a b* ſoit égale à *a c*, je dis que l'angle *b* eſt égal à l'angle *c*: car ſi nous imaginons que la baſe *b c* eſt partagée également en *d*, la ligne *a d* fera deux triangles *a d c* & *a d b*, & les trois côtez de l'un ſeront égaux aux trois côtez de l'autre; car *a c* eſt égal à *a b* par l'hypotheſe ou ſuppoſition de la propoſition même; *d c* eſt égal à *d b*, parce que nous ſuppoſons ici que la baſe *b c* eſt partagée également en *d*. Le troiſiéme côté *a d* eſt commun à tous les deux triangles: ainſi les trois côtez de l'un ſont égaux aux trois côtez de l'autre, & par conſequent tout le triangle *a d c* eſt égal à tout le triangle *a d b*, & l'angle *c* à l'angle *b*; (2. 13.) ce qu'il faloit demontrer.

16. Dans tout triangle Iſoſcele, la ligne qui tombant de l'angle du ſommet partage la baſe en deux également, eſt perpendiculaire à la même baſe, & diviſe l'angle du ſommet auſſi en deux également: car l'angle *a d c* eſt égal à l'angle *a d b* par la précedente: & par conſequent ils ſont tous deux droits, & la ligne *a d* perpendiculaire ſur *b c*, (1. 15.) & de même l'angle *d a c* eſt égal à l'angle *d a b* par la précedente.

17. En tout triangle le plus grand côté *ſoûtent* ou *ſoutient* (*ſubtendit*) le plus grand angle, c'eſt-à-dire, eſt oppoſé au plus

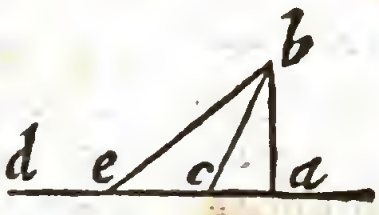
plus grand angle. Soit le côté *b c* plus grand que le côté *a c*, je dis que l'angle *a* ſoûtenu par le côté *b c* eſt plus grand que l'angle *b* ſoûtenu par le côté *a c*: car puiſque *b c* eſt plus grand que *c a*. ſoit imaginé *c d* égale à *c a*, afin que *a d c* ſoit un triangle Iſoſcele: donc (2. 15.) l'angle *c a d* ſera égal à l'angle *c d a*. Or l'angle *c a b* eſt plus grand que l'angle *c a d*: comme (*le tout eſt plus grand que ſa partie*) Donc l'angle *c a b* eſt plus grand que l'angle *c d a*. De plus, cet angle *c d a* étant *externe* à l'égard du petit triangle *d a b*, cet angle, dis-je, *c d a* ſera plus grand que le ſeul interne *b*: (2. 10.) Donc, à plus forte raiſon, l'angle *c a b* ſera plus grand que l'angle *b*; ce qu'il falloit prouver.



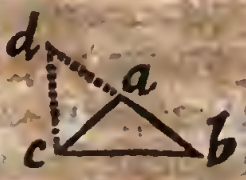
18. Tout triangle doit avoir neceſſairement deux angles aigus: car s'il n'en avoit qu'un, les deux autres ſeroient ou deux obtus, ou deux droits, ou l'un obtus, & l'autre droit. Or rien de tout cela ne peut être, puiſque (2. 9.) tous les trois angles enſemble ne valent que deux droits.

19 De toutes les lignes qu'on puiſſe tirer d'un point donné à une ligne donnée, la plus courte eſt la perpendiculaire, & les plus longues ſont celles qui s'éloignent

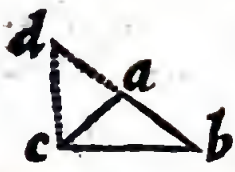
gnent le plus de la perpendiculaire. Soit donnée la ligne *a d*, & le point donné *b*; soit de plus *b a* perpendiculaire à *d a*, de laquelle *b e* soit plus éloignée que ne l'est *b c*: je dis que *b a* est plus courte que toute autre ligne possible, par exemple, plus courte que *b c*, & davantage, que *b e* est plus longue que *b c*. Car dans le triangle *a b c* l'angle *a* est droit, & par consequent le plus grand de tous, puisque les deux autres doivent necessairement être aigus: (2. 18.) Donc le côté *b c* est plus grand que *b a*, (2. 17.) comme soûtenant le plus grand angle. De même dans le triangle *b c e* l'angle *b c e* est obtus, puisque l'angle *b c a* est aigu, & par consequent le côté *b e* sera plus grand que *b c*, (2. 17.) comme soûtenant le plus grand angle.



20. En tout triangle deux côtez pris ensemble sont plus longs que le troisiéme. Soit le triangle *a b c*, je dis que le côté *a b*, plus *a c*, est plus long que le seul *c b*: car soit prolongé *b a*, & qu'on imagine *a d* égal à *a c*, le triangle *a d c* sera Isoscelle, & par consequent l'angle *a c d* sera égal à l'angle *d*: (2. 15.) Donc l'angle *d c b*, qui est plus grand

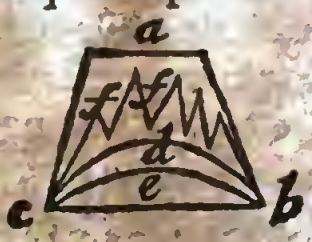


que



que l'angle *d c a*, eſt auſſi plus grand que l'angle *d*: Donc en conſiderant comme un ſeul triangle *b d c*, le côté *b d* ſera plus grand que *c b*, (2. 17.) comme ſoûtenant un plus grand angle. Or *b d* eſt égal aux deux *b a*, *a c*, puiſque *a d* eſt égal à *a c*: Donc les deux *b a*, *a c*, ſont plus grands que *b c*; ce qu'il faloit prouver.

21. Quoi-que cette propoſition ſoit démontrée, elle peut néanmoins paſſer pour un principe naturellement connu. Car la ligne *c b* étant une ligne droite, elle fait auſſi le plus court chemin depuis le point *c* juſqu'au point *b*, tandis que les autres



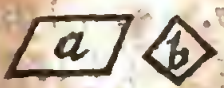
c a b, ou bien *c d b*, ou *c e b*, prennent des détours, & par conſequent des chemins plus longs. Et même on peut avec Archimede poſer pour principe, que des lignes qui font ainſi des circuits, celles-là ſont plus longues, qui dans leur circuit renferment les autres, & qu'ainſi *c d b* eſt plus longue que *c e b*, & *c a b* que *c d b*; pourvû néanmoins que ces lignes ne rentrent point comme en cette figure, où les lignes *c f f b* peuvent être plus longues que *c a b*, quoi qu'elles ſoient renfermées dans le circuit de *c a b*.

LIVRE TROISIEME.

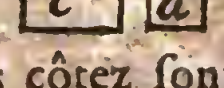
Des Quadrilateres, & des Polygones.

1. LEs figures compriſes entre quatre lignes droites, qui font quatre angles ſont appellées *Quadrilateres*.

2. Quand les lignes oppoſées ſont paralleles, le Quadrilatere s'appelle *Parallelogramme*, *a*; ſinon il s'appelle ſimplement *Trapeze*, *b*



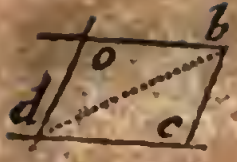
3. Quand le parallelogramme a tous les quatre angles droits, il s'appelle *Parallelogramme Rectangle*, *c*, ou, pour abreger, ſimplement *Rectangle*: & ſi de plus tous les côtez ſont égaux, il s'appelle *Quarré*, *d*.



4. Si tous les côtez étant égaux, les angles néanmoins ne le ſont pas; alors le parallelogramme s'appelle *Rhombe*, ou *Loſange*.

5. Si le parallelogramme n'a ni les angles, ni les côtez égaux, il s'appelle *Rhomboïde*, *a*.

6. Et en tout parallelogramme les angles oppoſez ſont égaux. Soit le parallelogram-



gramme *o b c d*, je dis que l'angle *o* eſt égal à l'angle *c*: car l'angle *o* eſt égal à l'angle exterieur *d*, (1. 31.) & *d* eſt égal à *c*: (1. 31.) donc *o* eſt égal à *c*:

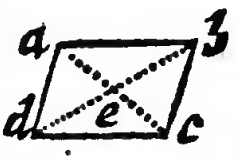
7. La ligne tirée d'un angle à l'autre angle oppoſé, s'appelle *Diagonale* ou *Diametre*, comme *b d*.

8. Tout parallelogramme eſt diviſé en deux parties égales par la diagonale. La diagonale *b d* diviſe le parallelogramme *o b c d* en deux triangles *o b d* & *b c d*. Il faut donc prouver qne ces deux triangles ſont êgaux. 1. L'angle *o* eſt égal à l'angle *c*. (3. 6.) 2. L'angle *o b d* eſt égal à l'angle *c d b*; (1. 31.) & par même raiſon auſſi l'angle *o d b* eſt égal à l'angle *c b d*. Ainſi ces deux triangles ont tous les trois angles égaux réciproquement, chaque angle de l'un à chaque angle de l'autre: & de plus, le côté *b d* eſt commun à l'un & à l'autre triangle: Donc auſſi tout le triangle *o b d* eſt égal à tout le triangle *c d b*. (2. 14.)

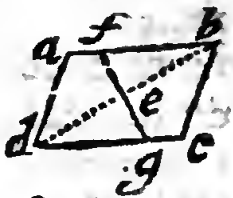
9. En tout parallelogramme les côtez oppoſez ſont égaux, puiſque le triangle *o b d* eſt tout égal à tout le triangle *d o b*, par la précedente: auſſi le côté *c d* ſera égal au côté *b o*, & le côté *o d* au côté *b c*; ce qu'il faloit prouver.

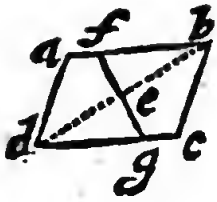
10 Deux diagonales *a c* & *b d* ſe coupent

pent mutuellement par le milieu *e* : car dans les triangles *a e d* & *b e c*, le côté *a d* eſt égal au côté *c b* : (3. 9.) l'angle *e a d* eſt égal à l'angle *e c b*, (1. 31.) & de même l'angle *a d e* eſt égal à l'angle *c b e*; (1. 31.) & de plus l'angle *a e d* eſt égal à l'angle *c e b*, (1. 23.) puiſqu'il lui eſt oppoſé par la pointe: Donc le côté *d e* eſt égal au côté *b e*, & le côté *a e* au côté *c e*. (2. 14.) Ainſi ces deux Diagonales ſont diviſées également en *e*.



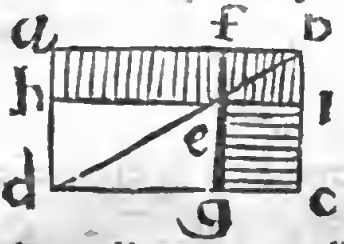
11. Toute ligne droite *f g*, qui paſſe par le milieu de la diagonale *e*, partage le parallelogramme en deux également. Il faut prouver que le trapeze, c'eſt-à-dire, le quadrilatere irrégulier; *a f g d a* eſt égal au trapeze *c g f b c*. 1. Le triangle *b e f* eſt égal au triangle *d e g*: car le côté *d e* eſt égal à *e b* par l'hypotheſe; l'angle d'*f* eſt égal à l'angle de *g*; (1. 31.) l'angle en *e* eſt égal de part & d'autre, puiſqu'il eſt oppoſé par la pointe, *&c.* Donc le triangle *f e b* eſt égal au triangle *g e d*. (2. 14) 2. Tout le triangle *a d b* eſt égal au tout *c b d*: (3. 8.) Donc, ſi du triangle *a d b* on ôte le petit triangle *f e b*, & qu'en récompenſe on lui donne le trian-





gle *d e g*, il ſe fera un trapeze *a f g d* égal au triangle *a d b*, c'eſt-à-dire, à la moitié de tout le parallelogramme; ce qu'il falloit prouver.

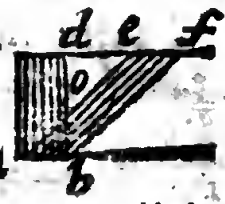
12. Si dans la diagonale *b d* on prend un point *e*, par lequel paſſent deux paralleles aux côtez, ſçavoir *g e f*, & *h e i*; il ſe fera quatre parallelogrammes, ſçavoir *e f b i*, *e h d g*; (& ces deux s'appellent *Parallelogrammes d'autour du diametre*) & les deux autres parallelogrammes ſont *e h a f*, & *e i c g*, & ces deux s'appellent *Complemens*: & les deux complemens avec un parallelogramme d'autour du diametre font la figure qu'on appelle *Gnomon* ou *Eſquierre*, comme eſt ici ce qui eſt haché ou marqué par des traits.



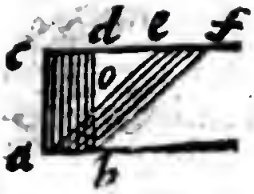
13. Eu tout parallelogramme les *Complemens* ſont égaux. Il faut prouver que *e h a f* eſt égal à *e g c i*. Tout le triangle *b a d* eſt égal au tout *b d c*: (3. 8.) de même le triangle *e f b* eſt égal au triangle *e b i*, (3. 8.) & auſſi *e h d* eſt égal à *e g d*: (3. 8.) Donc ſi des deux triangles égaux *b d a* & *b d c*, on ôte choſes égales, à ſçavoir, ſi on ôte d'une part *e f b*, & *e h d*, & de l'autre *e i b*, & *e g d*, il

il reſtera d'une part le parallelogramme *e b a f* égal au parallelogramme *e i c g*, qui reſtera de l'autre part, ce qu'il falloit prouver.

14. Les parallelogrammes qui ont une même baſe, & qui ſont entre les mêmes paralleles, ſont égaux. Soit un parallelogramme *a b d c*, & un autre *a b f e*, en ſorte que la baſe *a b* ſoit commune à tous les deux, & que la ligne *c d* étant continuée, paſſe par *e f*; ſi bien que ces deux parallelogrammes ſoient ainſi entre deux paralleles, & terminez par elles, à ſçavoir, entre la ligne *a b*, & la ligne *c f*, parallele à *a b*: je dis que le parallelogramme *a b d c* eſt égal à *a b f e*.

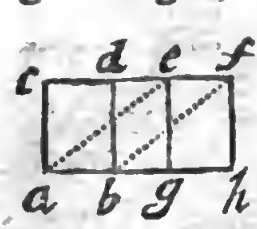


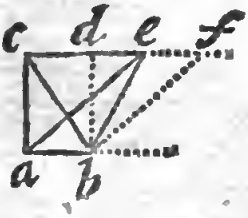
1. *c d* eſt égale à *e f*, puiſque l'une & l'autre ſont égales à *a b*: (3. 9.) Donc ſi à chacune de ces deux lignes égales nous ajoûtons la ligne *d e*; *c e* ſera égale à *d f*. 2. *c a* eſt égal à *d b*. (3. 9.) 3. L'angle *a c e* eſt égal à l'angle *b d f*: (1. 31.) Donc tout le triangle *a e c* eſt égal au tout *b f d*. Donc ſi de chacun de ces deux triangles égaux, on ôte le triangle blanc *d e o* qui eſt entre les deux parallelogrammes, & qu'on leur ajoûte auſſi à chacun le triangle contrehaché, *o a b*; il reſultera



tera de tout cela d'une part le parallelogramme *a b d c* égal au parallelogramme *a e f b*, qui ſera fait de l'autre part.

15. Les parallelogrammes qui ſont entre les mêmes paralleles *a b* & *c f*, & ſur des baſes égales, l'un ſur *a b*; & l'autre ſur *g h*, en ſorte que *a b* ſoit égale à *g h*, ſont égaux. Car ſi l'on imagine un troiſiéme parallelogramme *a e f b*, celuy-ci ſera égal à *a b d c*, (3. 14.) puiſqu'il eſt ſur la même baſe *a b*, & entre les mêmes paralleles *a b* & *c f*: & ce même parallelogramme *a e f b* eſt auſſi égal à *g h f e*, puiſque l'un & l'autre ont même baſe, ſçavoir *e f*, (il n'importe de rien que la baſe ſoit au haut ou au bas) & qu'ils ſont entre les mêmes paralleles, ſçavoir entre *f e* & *b a*. Donc auſſi *b f e g* eſt égal à *a b d c*, puiſqu'ils ſont égaux à un troiſiéme *a e f b*.





16. Les triangles qui ſont ſur même baſe *a b*, & entre mêmes paralleles *a b* & *c e*, ſont égaux. Le triangle *a b c* eſt égal au triangle *a e b*, parce que ſi l'on imagine une ligne *b d* parallele à *a c*, & une autre *b f* parallele à *a e*,

ou

on aura deux parallelogrammes *a c d b*, & *a e f b*, leſquels étant ſur même baſe *a b*, & entre mêmes paralleles, ſeront égaux. (3. 14.) Or le triangle *a c b* eſt la moitié du parallelogramme *a c d b*, & le triangle *a e b* eſt la moitié du parallelogramme *a e f b*: (3. 8.) Donc ces deux triangles ſont égaux.

17. Les triangles ſûr baſes égales, & entre mêmes paralleles, ſont égaux. La preuve en eſt aiſée.

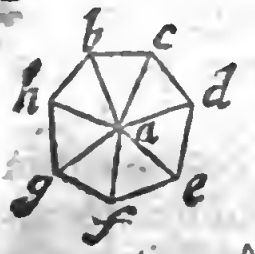
18. Si un triangle a même baſe avec un parallelogramme, & eſt entre mêmes paralleles, il ſera la moitié de ce parallelogramme. Le triangle *a b c* eſt la moitié du parallelogramme *a e f b*.

19. Le *Pentagone* eſt une figure à cinq côtez, & cinq angles. Si tous les côtez ſont égaux, & tous les angles auſſi; le Pentagone eſt *Regulier*.

20. L'*Hexagone* eſt de ſix côtez, & de ſix angles; l'*Heptagone* de ſept; l'*Octogone* de huit, *&c.* qui ſont auſſi *Reguliers*, quand tous les angles & tous les côtez ſont égaux entre eux.

21. *Polygone* eſt generalement toute figure, qui eſt compriſe ſous pluſieurs côtez, & fait pluſieurs angles: mais on ne ſe ſert gueres de ce nom, ſi les figures n'ont plus de quatre, ou de cinq côtez.

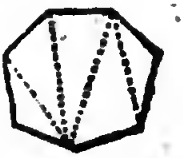
22. Tout polygone ſe peut diviſer en autant de triangles qu'il a de côtez. Si au dedans du polygone on prend un point *a* en quelque part que ce ſoit, & que de ce point on imagine des lignes tirées vers chaque angle *a b*, *a c*, *a d*, *&c.* Il ſe fera autant de triangles, qu'il y a de côtez dans le polygone.



23. Les angles des polygones ſont tous enſemble deux fois autant d'angles droits, moins quatre, qu'il y a de côtez. Par exemple, ſi le polygone a ſept côtez, dont le double eſt 14. & ſi en ôtant quatre, il reſte dix: je dis que tous les angles de cet heptagone, ſçavoir l'angle *c b h*, plus *b h g*, plus *h g f*, *&c.* ſont tous enſemble égaux à ces dix angles droits. Car ſi du point *a* on tire vers les angles ſept lignes *a b*, *a c*, *a d*, *&c.* pour faire les ſept triangles, chacun de ces triangles aura trois angles, qui en valent deux droits: (2. 9.) de ſorte que tous les angles enſemble de tous ces ſept triangles valent 14 droits. Or chacun de ces triangles a un angle, qui va aboutir au point *a*; en ſorte qu'étant tous poſez autour de ce point *a*, ils rempliſſent tout l'eſpace d'alentour: Donc tous ces ſept angles aboutiſſant ainſi au point *a*, valent 4. droits. (1. 22.) & par conſequent tous les autres angles qui ſont vers les angles

gles de l'heptagone, valent dix droits ; ce qu'il falloit prouver.

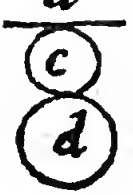
24. Le polygone ſe peut auſſi diviſer en triangles, en tirant des lignes d'angle à angle ; alors le nombre des côtez ſurpaſſera de deux celui des triangles.



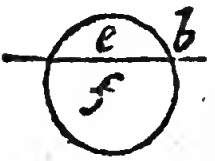
LIVRE QUATRIEME.

Du Cercle.

1. UNe ligne eſt dite *Toucher* un cercle, quand elle le touche ſans qu'elle entre dedans, quoi-qu'elle ſoit prolongée au de-là du point d'attouchement. La ligne *a* touche ici le cercle *c*, comme auſſi le cercle *c* touche le cercle *d*: mais en *b* la ligne entre dans le cercle, & le coupe.

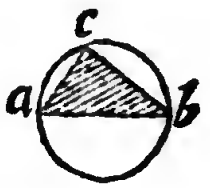


2. Une ligne entrant dans un cercle, le coupe en deux parts, qu'on appelle *Segmens*. *e* eſt le *petit* ſegment, & *f* eſt le *grand*; & cette ligne qui coupe, s'appelle *Corde*, & les parties du cercle coupées s'appellent *Arcs*. La corde avec l'arc fait aux deux bouts deux angles mixtes, qu'on appelle *Angles du Segment*, comme *bf*.



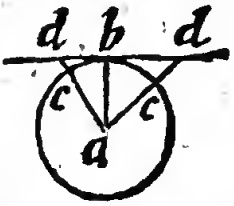
3. Si

3. Si dans l'arc du segment *a c b* on prend un point *c* en quelque part que ce soit, & que l'on imagine deux lignes *c a*, *c b*; elles feront un angle *a c b*, qui s'appelle *l'angle dans le segment*: & on dit que cet angle *a c b insiſte* ſur l'arc de l'autre ſegment d'embas.



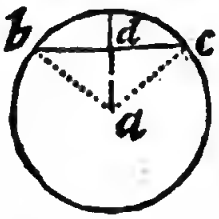
4. *Secteur* du cercle eſt un triangle mixte compris entre deux demi-diametres *a b*, *a c*, & un arc du cercle *b c*. Le ſecteur eſt ici marqué par des traits.

5. Si par l'extrémité d'un demi-diametre *a b*, on imagine une perpendiculaire *b d*, elle touchera le cercle en ce ſeul point *b*; & tout autre point imaginable de la ligne *b d* ſera hors le cercle. Par exemple, le point *d* eſt dehors; car ſi on imagine une ligne tirée du centre *a d*, laquelle coupe le cercle au point *c*, cette ligne *a d* ſera plus longue que *a b*, (2. 19.) & par conſequent plus longue que *a c*, puiſque *a c* eſt égale à *a b*: (1. 14.) Donc le point *d* tombe au de-là du cercle. Ce qu'il falloit démontrer.



6. Une corde *b c* eſt diviſée en deux égale-

également par une perpendiculaire *a d*; tirée du centre *a*: car le triangle *a b c* eſt iſoſcele, puiſque *a b* eſt égal à *a c*: (1. 14.) donc la perpendiculaire *a d* coupe la baſe *b c* en deux également. (2. 16.) L'arc *b c* eſt auſſi diviſé également.

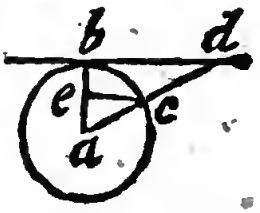


7. Si deux lignes *d b* & *d c* touchent un cercle, elles ſeront égales. Car imaginant du centre vers les points d'attouchement deux lignes *a b* & *a c*, celles-ci ſeront perpendiculaires aux touchantes. (4. 5.) De plus, ſi on imagine la ligne *b c*, l'angle *a b c* ſera égal à l'angle *a c b*: (5. 15.) donc ſi de choſes égales, c'eſt-à-dire, des angles droits *a b d* & *a c d*, on ôte les choſes égales, c'eſt-à-dire, l'angle *a b c*, d'une part, & de l'autre l'angle *a c b*, les angles qui reſteront ſeront égaux, c'eſt-à-dire, *c b d* ſera égal à *b c d*, & par conſequent le côté *d b* ſera égal au côté *d c*. (2. 15.)

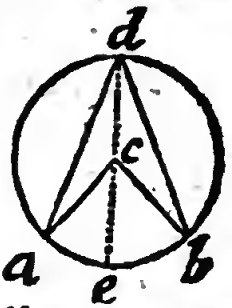
8. Deux cordes égales *b c*, *e f*, font deux ſegmens *b d c* & *e g f* égaux, & les perpendiculaires *a o* & *a n* ſeront égales. Ceci eſt facile à prouver.

9. Soit

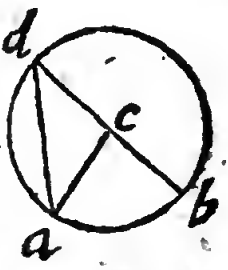
9. Soit le demi-diametre *a b*, la perpendiculaire *b d*, une autre ligne *a c d* coupant le cercle en *c*, & la perpendiculaire en *d*, une autre ligne *c e* perpendiculaire au rayon *a b*: toutes ces lignes ont des noms affectez. La ligne *b d* terminée ainsi par *a d*, s'appelle *Tangente* de l'arc *b c*, par exemple de 30. degrez; la ligne *a d* s'appelle *Secante* du même arc de 30. degrez; la ligne *c e* s'appelle le *Sinus* du même arc; & enfin *a b*, s'appelle le *Sinus-total*, ou simplement le rayon.



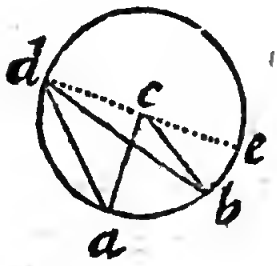
10. Si dans une circonference d'un cercle on prend deux points *a* & *b*, desquels on tire deux lignes jusques au centre *c*, & deux autres jusques à un autre point *d* de la circonference; il se fait deux angles, dont l'un *a c b* s'appelle *Angle au centre*, & l'autre *a d b*, *Angle à la circonference*.

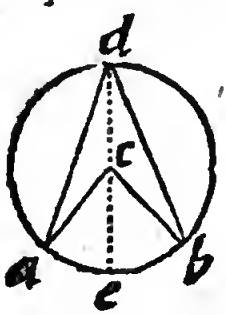


11. L'angle au centre *a c b* est toûjours double de l'angle à la circonference *a d b*. 1. Si l'une des lignes, comme *b d*, passe par le centre *c*, l'angle *a c b* sera externe à l'égard du triangle *a c d*:



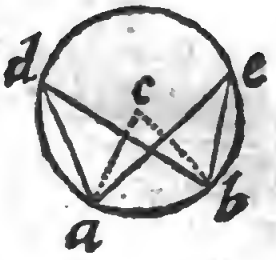
(2. 10.) & par conſequent il ſera égal aux deux angles internes oppoſez, ſçavoir à l'angle *a d c*, plus à l'angle *d a c*: (2. 10.) Or ces deux angles *a d c* & *d a c* ſont égaux (2. 15.) puiſque les deux jambes *c a* & *c d* ſont égales: (1. 14.) Donc l'angle *a c b* eſt double d'un de ces deux, ſçavoir de *a d c*; ce qu'il falloit prouver. 2. Si aucune des lignes *a d* ou *b d*, ne paſſe par le centre *c*; ſoit imaginé *d c e*, en ſorte que *e* ſe trouve hors l'arc *a b*: alors tout l'angle *a c e* ſera double de l'angle *a d e*, par ce que je viens de montrer dans la premiere partie de cette propoſition; & de même l'angle *b c e* eſt double de l'angle *b d e*: Donc ſi de l'angle *a c e* on ôte *b c e* & que de l'angle *a d e*, (qui eſt la moitié de *a c e*) on ôte *b d e*, (qui eſt auſſi la moitié de *b c e*) ce qui reſtera *a d b* ſera la moitié de *a c b*: parce que c'eſt une maxime, que ſi une quantité eſt double d'une autre, & qu'on ôte de la grande le double de ce qu'on ôte de la petite, ce qui reſtera de la grande ſera encore double de ce qui reſtera de la petite. 3. Si le point



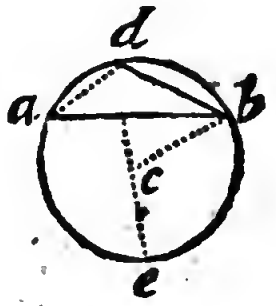


point *e* tombe dans l'arc *a b*, alors l'angle *a c e* ſera double de l'angle *a d e*, & l'angle *b c e* ſera auſſi double de *b d e*, par ce qui a été démontré dans la premiere partie de cette propoſition : Donc l'angle total *a c b* eſt double de *a d b*.

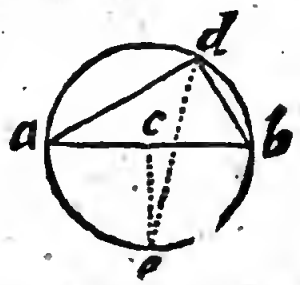
12. Tous les angles qui inſiſtent ſur un même arc *a b* ſont égaux, en quelque part de la circonference que leur pointe aboutiſſe. L'angle *a e b* eſt égal à l'angle *a d b*, parce que l'un & l'autre eſt la moitié de l'angle *a c b*, qui ſe feroit au centre *c*. (4. 11.)



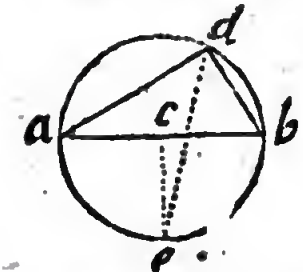
13. L'angle au centre *b c e*, inſiſtant ſur la moitié de l'arc *a b*, ſur lequel inſiſte un autre angle à la circonference *a d b*, eſt égal à ce même angle de la circonference. (4. 11.)



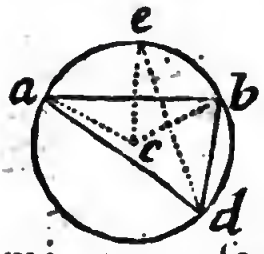
14. L'angle *a d b*, qui inſiſte ſur la demi-circonference, eſt droit ; car ſi *e* partage en deux la demi-circonference *a e b*, l'angle *a c e* ſera égal à l'angle *a d b* par la précédente. Or *a c e* eſt droit : (1. 15.) Donc auſſi *a d b* eſt droit.



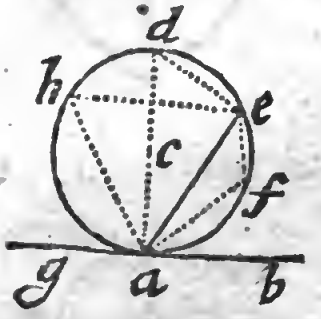
15. L'angle *a d b*, dans le petit ſegment, eſt obtus, parce que l'arc *a e b* étant plus de la moitié de la circonference, l'arc *b e*, qui eſt la moitié de l'arc *a e b*, aura plus de 90. degrez. Ainſi l'angle *a d b*, qui eſt égal à l'angle *b c e*. (4. 13.) ſera de plus de 90. degrez; c'eſt-à dire, il ſera obtus.



16. L'angle *a d b* dans le grand ſegment eſt aigu: car il eſt égal à l'angle *a c e*. Or l'arc *a e b* étant moindre que la demi-circonference, l'arc *a e*, que eſt la moitié de *a e b*, aura moins de 90. degrez.



17. Si une droite *g a b* touche le cercle à un point *a*, & qu'une autre ligne *a e* coupe le même cercle, l'angle *b a e* ſera égal à l'angle dans le ſegment oppoſé *a h e*: & l'angle *e a g* ſera égal à l'angle dans l'autre ſegment *a f e*. Car ſoit imaginée la perpendiculaire *a d*, qui paſſera par le centre *c*, (4. 5.) l'angle *a e d* ſera droit: (4. 14.) & par conſequent, puiſque les trois angles d'un trian-

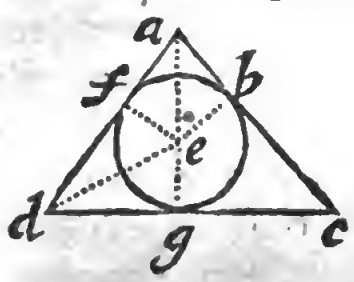


triangle ſont égaux à deux droits, (2. 9.) l'angle *e a d* avec l'angle *a d e* fera un droit. Or ce même angle *e a d* avec *e a b* fait auſſi un droit, puiſque *a d* eſt perpendiculaire à *a b*: Donc l'angle *e a b* eſt égal à l'angle *a d e*, & par conſequent à tout autre angle qui inſiſtera ſur le même arc *a e*, & qui aboutira à quelque autre point de la circonference, comme à l'angle *e h a* puiſque tous ces angles ſont égaux entre eux; (4. 12.) & c'eſt la premiere partie de cette propoſition. Maintenant il faut prouver que l'angle *e a g*, eſt égal à l'angle *a f e*; ce qui eſt l'autre partie. Dans le triangle *a e f*, l'angle *a f e* avec *f a e* & *f e a*, eſt égal à deux droits, (2. 9.) Or l'angle *f e a* eſt égal à *f a b*, par ce qui vient d'être prouvé dans la premiere partie de cette propoſition, car la ligne *f a* peut être conſiderée comme coupant le cercle & la tangente *b a*, auquel cas l'angle *f a b* doit être égal à tout autre angle qui ſeroit fait dans le ſegment oppoſé *f d h a*. Or l'angle *f e a* eſt fait dans ce ſegment, parce qu'il inſiſte ſur l'arc *f a*, & que ſa pointe *e* aboutit à un point de la circonference *f e d h a*, ainſi cet angle *f e a*, eſt égal à l'angle *f a b*. Donc les deux angles

e a f

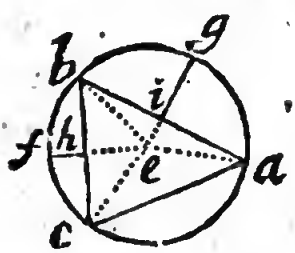
e a f & *f a b*, avec *a f e*, ſont égaux à deux droits. Mais les mêmes *e a f* & *f a b*, avec *e a g* ſont auſſi égaux à deux droits : (1. 20) Donc l'angle *e a g* eſt égal à l angle *e f a*; ce qu'il falloit prouver.

18. Une figure rectiligne eſt dite *Circonſcrite* à un cercle, quand tous les côtez de cette figure touchent le cercle ſans le conper. Le triangle *a c d* eſt circonſcrit au cercle *b g f*, parce que chaque côté de ce triangle touche le cercle en *b*; en *g*, & en *f*.



19. Une figure eſt *inſcrite* au cercle, quand tous les angles aboutiſſent à la circonference, comme le triangle *a b c* de la figure ſuivante.

20. Tout triangle *a b c* peut être inſcrit dans un cercle: car ſi l'on imagine deux lignes *e i*, & *e h*, qui coupent perpendiculairement, & par le milieu les côtez *a b* & *b c*, on pourra tirer un cercle du point *e* comme du centre par le point *b*. Or je dis que ce cercle paſſera par les pointes *a* & *c*: Car 1. Les deux triangles



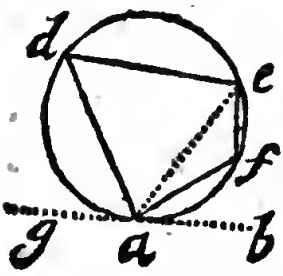
gles *e i b* & *e i a* ſeront tout égaux, puiſque le côté *i b* eſt égal au côté *i a* par l'hypotheſe, le côté *e i* eſt commun, l'angle vers *i* eſt droit de part & d'autre : Donc (2. 11.) le côté *e b* eſt égal au côté *e a*. 2. Par même raiſon on prouvera que le côté *e c* eſt égal à *e b* : & par conſequent le cercle, dont le centre ſeroit *e*, & le demi-diametre *e b*, paſſeroit par *a* & par *c*.

21. Tout triangle *a c d* (fig. de l'art. 18.) peut être circonſcrit à un cercle. Car ſi l'on imagine deux lignes *a e*, & *d e*, qui diviſent en deux également les angles *a* & *d* ; & puis des perpendiculaires ſur les côtez du triangle, ſçavoir *e b*, *e f*, *e g* : je dis que ſi on tire un cercle du centre *e* par b, ce cercle touchera les trois côtez du triangle aux points *b*, *f*, *g*. Car 1. Les deux triangles *a e b*, *a e f* ſont tout égaux : Car ils ont un côté *a e* commun, un angle vers *b* & *f* droit, un autre angle vers *a* égal, puiſque l'angle *b a f* a été diviſé en deux également : Donc le côté *e b* eſt égal au côté *e f*. (2. 14.) 2. Par même raiſon on prouvera que *e g* eſt égal à *e f*. Et comme d'ailleurs ces lignes *e b*, *e f*, *e g*, ſont perpendiculaires ſur les côtez du triangle, le cercle

b f g

bfg touchera ces côtez en ces points. (4. 5)

22. Tout quadrilatere *afed* inſcrit dans un cercle, a les angles oppoſez égaux enſemble à deux droits. Car ſi par le point *a* on tire une tangente *gab*, & une diagonale *ae*, l'angle *afe* ſera égal à l'angle *eag*, (4. 17.) & l'angle *ade* à l'angle *eab*: (4. 17.) & par conſequent, puiſque les deux *eab* & *eag* ſont égaux à deux droits, ces deux angles oppoſez *f* & *d* ſont auſſi égaux à deux droits. De même maniere on prouvera que les angles *fed*, & *fad* ſeront égaux à deux droits, ſi l'on imagine une autre tangente par le point *f*.

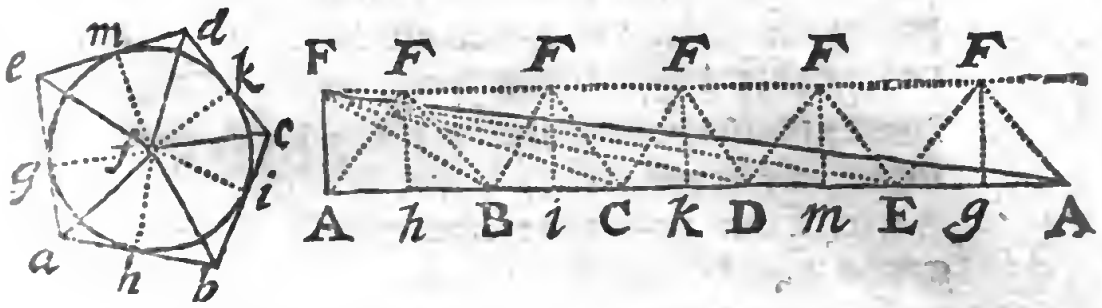


23. La converſe de cette propoſition eſt auſſi manifeſte; ſçavoir, que tout quadrilatere, dont les angles oppoſez ſont égaux à deux droits, eſt inſcrit dans un cercle; c'eſt-à-dire, qu'il peut y avoir un cercle qui touche tous ces quatre angles.

24. Tout polygone circonſcrit à un cercle eſt égal à un triangle rectangle, dont une jambe ſeroit égale au demi-diametre du cercle, & l'autre à toute la circonference du polygone. Soit

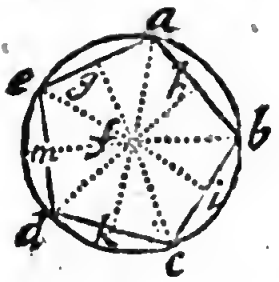
la

la ligne F A égale au demi-diametre *fh*, & la perpendiculaire infinie A B C D, *&c.* ſur laquelle ſoit priſe A *h* égale à *a h*, & *h* B égale à *h b*, & B *i* égale à *b i*, & *i* C égale à *i c*, *&c.*



afin que toute la ligne *A B C D E A* ſoit égale à toute la circonference du polygone *a b c d e a*. De plus ſoit F *F F* parallele à A B, afin que toutes les perpendiculaires *h F*, *i F*, *k F*, *&c.* ſoient égales au demi-diametre *fh* ou *fi*, *&c.* il eſt clair que le triangle *A F B* ſera égal au triangle *a f b*, & le triangle *B F C* au triangle *b f c*, & *C F D* à *c f d*, *&c.* Ainſi tous ces triangles enſemble ſeront égaux à tout le polygone. Or le triangle F A A eſt égal à tous ces triangles enſemble, à cauſe qu'en tirant les lignes *B* F, *C* F, *D* F, *&c.* Le triangle F A *B* ſera égal à *F A B*, & F *B* C à *F B C*, *&c.* (3. 16) Donc auſſi tout le triangle F A A eſt égal au polygone; ce qu'il falloit démontrer.

15. Tout polygone régulier eſt égal à

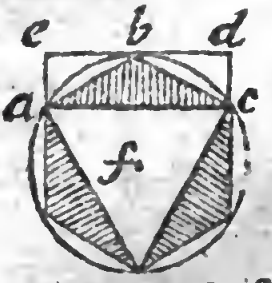


à un triangle rectangle, dont une jambe seroit toute la circonference du polygone, & l'autre; la perpendiculaire tirée du centre sur un des côtez du polygone. La preuve en est la même que celle de la proposition précedente. Car toutes les perpendiculaires *f h*, *f i*, *f k*, *&c.* sont égales, *&c.*

26. Tout polygone circonscrit est plus grand que le cercle, & tout polygone inscrit est plus petit. Cela est manifeste, parce que ce qui contient est plus grand que ce qui est contenu.

27. *Le Perimetre* (ou la circonference) de tout polygone circonscrit est plus grand que la circonference du cercle, & le perimetre de tout polygone inscrit est plus petit: cela est aussi manifeste par la 21. du second livre.

28. Si dans un petit segment de cercle *a b c*, on inscrit un triangle isoscele, en sorte que *a b* soit égal à *b c*;

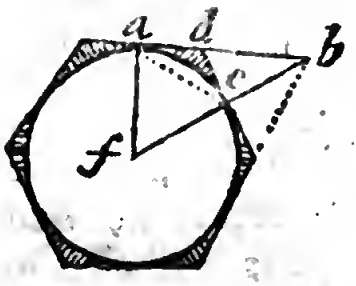


ce triangle sera plus grand que la moitié du segment. Car si on tire la tangente *e b d*, qui sera parallele à *a c*, car elle est perpendiculaire à *f b*, (4. 5.) à laquelle l'est aussi *a c*; (4. 6.) & si

de

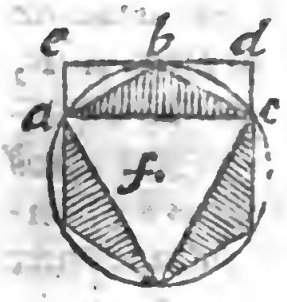
de plus on acheve le parallelogramme rectangle *a e d c*; celui-cy ſera plus grand que le ſegment du cercle *a b c*. Or le triangle *a b c* eſt la moitié du parallelogramme *a e d c*: (3. 18.) Donc ce triangle *a b c* eſt plus grand que la moitié du ſegment *a b c*.

29. Soit la tangente *a d b*, & la ſecante *f c b*, & la droite *a c*, & une autre tangente *c d*; je dis que le triangle *d b c* eſt plus de la moitié du triangle mixte, compris entre les droites *a b*, *c b*, & la circulaire *c a*: car dans le triangle *d b c* l'angle en *c* étant droit, (4. 5.) le côté *d b* ſera plus grand que *d c*. (2. 17.) Or *d c* eſt égal à *d a*: (4. 7.) Donc *d b* eſt plus grand que *d a*: Donc le triangle *c b d* eſt plus grand que le triangle *c a d*: (3. 17.) Donc il eſt plus grand que la moitié du triangle total *c b a*. Or ce triangle *c b a* eſt plus grand que le triangle mixte compris entre l'arc *a c*, & les droites *b c*, *b a*: Donc auſſi le triangle *d b c* eſt plus grand que la moitié du triangle mixte *a b c*.



30. De ces deux propoſitions il s'enſuit, qu'en multipliant les côtez des poly-

polygones réguliers, on en peut faire de circonſcrits & d'inſcrits, en ſorte que la difference, dont le circonſcrit ſurpaſſera le cercle, ou dont le cercle ſurpaſſera l'inſcrit, ſoit auſſi petite que l'on voudra ; parce que ſi de quelque quantité que ce ſoit, on ôte plus de la moitié, & du *reſidu* encore plus de la moitié, & derechef plus de la moitié encore du réſidu, & ainſi pluſieurs fois, on viendra enfin à laiſſer un réſidu auſſi petit que l'on voudra : ce qui eſt naturellement connu. Ainſi, après avoir inſcrit un triangle, qui ſera plus petit que le cercle de trois grands ſegmens, on peut inſcrire un hexagone, qui ſera plus grand que n'étoit le triangle ; mais qui ſera encore plus petit que le cercle de ſix petits ſegmens qui ſont icy blancs. Or ces ſix petits ſegmens tous enſemble ne contiennent pas tant d'eſpace, que la moitié des trois premiers ſegmens. (4. 28.) Après quoy on peut encore inſcrire un dodécagone, qui ſera ſurpaſſé par le cercle de douze petits ſegmens : mais tous ces douze enſemble ne vaudront pas la moitié des ſix ſegmens de l'hexagone ; & ainſi on peut, en multipliant les côtez des polygo-



nes,

nes, diminuer tant que l'on voudra la difference dont le cercle ſurpaſſera ce polygone inſcrit. De même, aprés avoir circonſcrit un triangle, on peut circonſcrire un hexagone, & puis un dodécagone, & une figure de vingt-quatre côtez, *&c.*

31. Tout cercle eſt égal à un triangle rectangle, dont une jambe eſt le demi-diametre, & l'autre une ligne droite égale à la circonference du cercle. Car ce triangle ſera plus grand que tout polygone inſcrit, & plus petit que tout polygone circonſcrit : (par la 14. 25. 26. & 27. du 4.) Donc il ſera égal au cercle. Car s'il étoit plus grand, pour petite qu'en fût la difference, on pourroit faire un polygone circonſcrit, dont la difference avec le cercle ſeroit moindre que la difference du même cercle avec ce triangle rectangle : ainſi ce polygone circonſcrit ſeroit plus petit que ce triangle ; ce qui eſt abſurde. De même, ſi ce triangle étoit plus petit que le cercle, on pourroit faire un polygone inſcrit, qui ſeroit plus grand que ce triangle ; ce qui eſt impoſſible.

Cette ſorte de démonſtration que nous venons d'employer, & qu'on appelle de l'impoſſible, *eſt une des plus belles inven-*

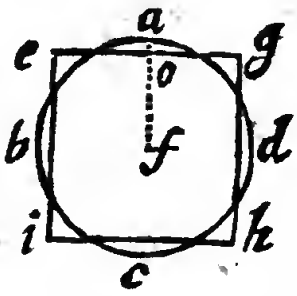
ventions de l'antiquité ; & toute la Geometrie des indiviſibles *eſt fondée là deſſus : de ſorte qu'il y a ſujet de s'étonner, que quelques nouveaux Auteurs l'ayent rejettée comme defectueuſe & indirecte. Que ſi l'on en vient à ce point de delicateſſe, que de ne pouvoir ſouffrir une démonſtration, ſi elle ne prouve directement & poſitivement ; il ſera fort aiſé de donner à celle-cy un tour qui la rende réguliere & directe : car on n'a qu'à poſer pour principe*, que ſi deux quantitez déterminées *a* & *b* ſont telles, que toute autre quantité imaginable, qui ſeroit plus grande ou plus petite que *b*, ſeroit auſſi plus grande ou plus petite que *a*, ces deux quantitez *a* & *b* ſont égales. *Et ce principe poſé, qui eſt en effet trés-manifeſte de ſoy-même, en prouvera directement que ce triangle eſt égal au cercle, puiſque toute figure imaginable (inſcrite) plus petite que le cercle, eſt auſſi plus petite que le triangle ; & que toute figure (circonſcrite) plus grande que le cercle, eſt auſſi plus grande que le triangle.*

C'*eſt ce qu'on appelle la* quadrature du cercle, *qui ne conſiſte qu'à faire un quarré, ou bien un triangle, ou une autre figure rectiligne égale au cercle ; ce qu'on feroit, ſi l'on pouvoit trouver une*

ligne

ligne droite égale à la circonference, comme il paroit en cette propoſition; mais cette égalité n'a jamais été trouvée geométriquement.

32. Une ligne étant diſpoſée en cercle, tiendra plus d'eſpace qu'en toute autre figure polygone réguliere que ce ſoit. Si la circonference du cercle *a b c d* ſe diſpoſe en quarré, ou en quelque autre polygone régulier, en ſorte que tous les côtez *e g*, *g h*, *h i*, *i e*, enſemble ſoient égaux à la circonference *a b c d*; je dis que tout ce cercle ſera plus grand que le polygone. Car le cercle eſt égal au triangle, dont un côté eſt la circonference, & l'autre côté eſt le demidiametre *f a*; & le polygone eſt égal au triangle, dont un côté eſt auſſi la même circonference *a b c d*, ou les côtez *e g h i*, & l'autre côté eſt *f o*, (4. 25.) Et comme *f o* eſt plus petit que *f a*, tout ce ſecond triangle égal au polygone ſera plus petit que le premier triangle égal au cercle: & par conſequent ce polygone ſera plus petit que le cercle; ce qu'il falloit prouver.



C'eſt ce qu'on entend, quand on dit communément, que de toutes les figures Iſoperimetres, *ou qui ont les circonferences égales, la plus grande eſt le cercle.*

LIVRE CINQUIEME.

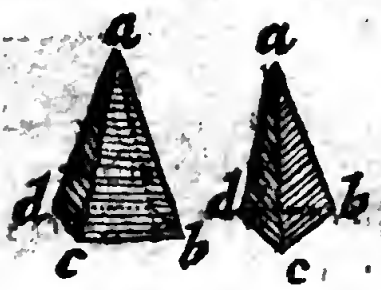
Des Solides.

1. UNE ligne droite eſt dite ſimplement *droite* ſur un plan, ou *érigée* ſur un plan à *angles droits*, lors qu'elle n'eſt point inclinée ſur ce plan plus d'un côté que d'un autre, comme une colonne ſur le pavé.

2. Deux plans ſont paralleles, quand toutes les perpendiculaires ou droites, tirées entre les deux plans, ſont égales.

3. Un plan eſt perpendiculaire ou *droit* ſur un autre plan, quand il n'eſt pas incliné ou panché plus d'un côté que d'un autre, comme une muraille ſur le ſol.

4. *L'angle ſolide* ſe fait; quand trois ou pluſieurs plans ſe joignent en aboutiſſant à un point, comme la pointe d'un diamant bien taillé.

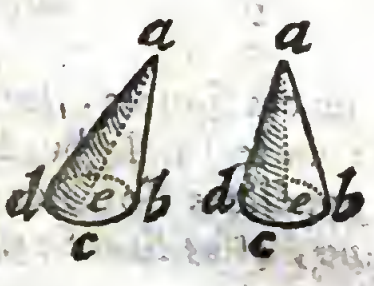


5. Si l'on imagine la ligne *a b* fixe au point *a*, & qu'elle ſoit meûë tout le long des côtez d'un polygone *b c d*, cette ligne

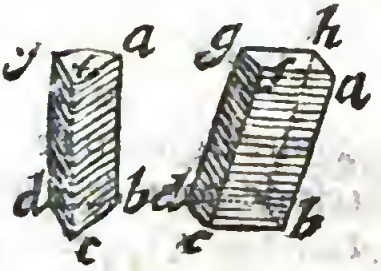
ligne par ce mouvement décrira une figure qui s'appelle *Pyramide*.

6. Le polygone s'appelle la *baſe* de la pyramide.

7. Si la ligne *a b* ſe meut le long d'un cercle *b c d*, elle décrit un *Cone*, dont ce cercle eſt la *baſe*; & la ligne tirée de la pointe *a* au centre du cercle *e* eſt *l'axe*.

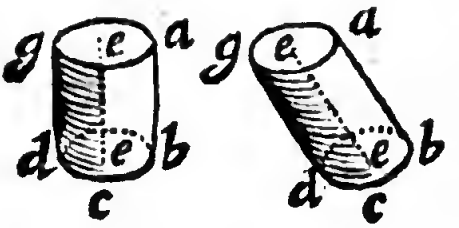


8. Si la ligne *a b* ſe meut uniformement autour de deux polygones *b c d*, *a f g*, qui ſoient tout-à-fait égaux, ayant leurs côtez & leurs angles égaux mutuellement, & que ces polygones ſoient paralleles, en ſorte que les côtez égaux ſe répondent parallelement, *a f* à *b c*, *f g* à *c d*, *&c.* Alors cette ligne par ſon mouvement fera une figure qui s'appelle *Priſme*; & les polygones en ſont les *baſes*.



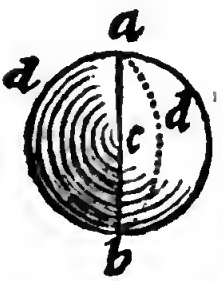
9. Si les baſes du priſme ſont des parallelogrammes, il s'appelle *Parallelepipede*.

10. Si la ligne *a b* ſe meut uniformement autour de deux cercles égaux & paralleles, elle décrit un *Cylindre*.



11. La ligne qui joint les centres *e e* des baſes, eſt *l'axe* du Cylindre.

12. Dans toutes ces figures, lorſque l'axe eſt perpendiculaire ſur la baſe *d e c*, les figures ſont appellées Iſoſceles; mais ſi l'axe eſt incliné, elles ſont Scalenes.



13. Si un demi-cercle *a d b* tourne autour de ſon diametre *a b*, il décrit une *Sphere* ou un globe, dont *l'axe* eſt *a b* : le *centre c*, le même que celuy du demi-cercle. Toute ligne tirée par le centre *c*, & terminée de part & d'autre par la ſurface de la ſphere, s'appelle *Diametre*, & peut être dite *Axe*.

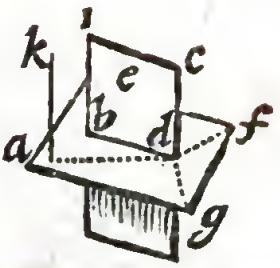
14. Toutes lignes tirées du centre *c* à la circonference, s'appellent *Rayons*, & ſont égales entre elles.

15. Deux lignes droites qui ſe touchent en ſe croiſant, ſont en même plan, & par conſequent tout triangle eſt auſſi en même plan.

16. Si deux plans *e d b*, & *d a b* ſe coupent, ils ſe coupent en une ligne droite *d b*, qui s'appelle la *Commune ſection*.

17. Si

17. Si une ligne *c d* eſt perpendiculaire à deux lignes *f d* & *g d* qui ſont dans le plan *f g d*, elle ſera auſſi perpendiculaire au plan.



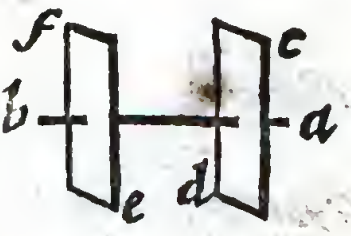
18. Si une ligne *c d* eſt perpendiculaire à trois *f d*, *g d*, *a d*, ces trois lignes ſont en même plan.

19. Si deux lignes *d c*, *b i* ſont perpendiculaires au même plan *f d b*, elles ſeront paralleles.

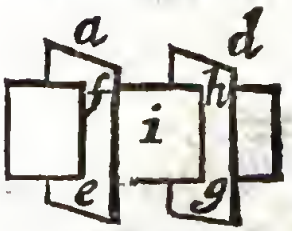
20. Si deux lignes *d c*, *b i* ſont paralleles, & qu'on tire quelque autre ligne droite de quelque point que ce ſoit d'une ligne à l'autre, comme *d b*, ces trois lignes ſeront en même plan.

21. Si deux lignes *d c*, *b i* ſont paralleles à une troiſiéme *a k*, encore qu'elles ne ſoient pas en un même plan, elles ſont paralleles entre elles.

22. Si une même ligne *a b* eſt perpendiculaire à deux plans *c d* & *e f*, ils ſont paralleles.



23. Si deux plans paralleles *d h g*, *a f e* ſont coupez par un troiſiéme *i*, les communes ſections *h g*, *f e* ſeront paralleles.



24. Si un angle ſolide eſt fait de trois angles plans, deux de ces angles ſont toûjours plus grands que le troiſiéme.

Toutes ces propoſitions ſont ſi manifeſtes, pour peu d'attention qu'on apporte à les conſiderer, qu'il n'eſt pas neceſſaire de s'arrêter à les prouver.

25. Tous les angles plans, qui font un angle ſolide, ſont enſemble plus petits que quatre droits. Car s'ils faiſoient quatre droits, ils feroient non un angle ſolide, mais un même plan. Donc afin qu'ils puiſſent faire un angle ſolide, il faut qu'ils ſoient moindres que quatre droits.

Je conſeille de faire avec du carton des angles, & des figures, & par ce moyen on comprendra aiſément ces choſes.

26. En tout parallelepipede les plans oppoſez ſont égaux: ceci eſt aiſé à comprendre.

Les huit propoſitions ſuivantes ſe démontreront dans la ſeconde partie de ces Elemens. Elles ſe peuvent néanmoins ici démontrer, en appliquant aux ſolides ce qui a été prouvé dans les plans, au 3. & au 5. livre; mais il n'eſt pas beſoin de s'y arrêter.

27. Les parallelepipedes qui ſont ſur des baſes égales, & entre les mêmes plans paralleles, ſont égaux. (voyez 3. 14.)

28. Tout

28. Tout parallelepipede eſt partagé en deux priſmes trianglaires égaux par le plan qui paſſe par les deux diametres paralleles des deux faces oppoſées.

29. Les priſmes triangulaires, qui ſont ſur des baſes égales, & entre les mêmes paralleles, ſont égaux.

30. Les Pyramides qui ſont ſur des baſes égales, & entre les mêmes paralleles, ſont égales.

31. Tous priſmes géneralement, tous cylindres, & tous cones qui ſont ſur des baſes égales, & entre les mêmes paralleles, ſont égaux.

32. Les pyramides & les cones qui ſont ſur des baſes égales aux baſes des priſmes & des cylindres, & qui ſont entre les mêmes paralleles; ſont le tiers de ces priſmes ou de ces cylindres.

33. Toute la ſphere eſt égale à un cone, dont l'axe perpendiculaire eſt le demi-diametre de la ſphere, & la baſe eſt un plan égal à toute la circonference convexe de la même ſphere.

34. De toutes les figures ſolides que peut renfermer une même ſuperface, la plus grande eſt la ſpherique.

35. *Corps regulier* eſt celui qui eſt compris entre des figures reguliéres & égales, duquel auſſi tous les angles ſolides ſont égaux, comme ſont....

36. Le *Tetraédre* compris ſous quatre triangles égaux & équilateraux, c'eſt une pyramide, dont la baſe eſt égale à chaque face.

37. L'*Hexaédre* ou *Cube* compoſé de ſix quarrez égaux, comme un dé à joüer.

38. L'*Octaédre* eſt de huit triangles égaux & équilateraux.

39. Le *Dodecaédre*, de douze pentagones égaux & équilateraux.

40. L'*Icoſaédre* de vingt triangles égaux & équilateraux.

41. Outre ces cinq corps réguliers il n'eſt pas poſſible d'en trouver d'autres; ce qu'on démontre ainſi.

On prend des triangles équilateraux, qui ſont les figures les plus ſimples de toutes les rectilignes. Il en faut pour le moins trois, pour faire un angle ſolide, or ayant joint trois de ces triangles pour en faire un angle, on trouve juſtement le tetraédre: car ces trois triangles aboutiſſant en un point, laiſſent une baſe triangulaire ſemblable & égale aux faces, comme l'on voit dans la ſeule compoſition.

Joignant quatre de ces triangles, on fait l'angle de l'Octaédre.

Avec cinq de ces triangles on fait l'angle de l'Icoſaédre.

Six de ces triangles joints enſemble ne peuvent point faire d'angle ſolide, car ils

ſont

ſont égaux à quatre droits : Or tout angle ſolide eſt fait par des angles plans, qui tous enſemble doivent être moindres que quatre droits : (5. 25.) ainſi il n'eſt pas poſſible de faire avec des triangles d'autres corps réguliers que ces trois.

Prenant maintenant des quarrez, & en joignant trois enſemble, on aura l'angle du cube ; & on ne ſçauroit faire d'autre corps que le cube avec des quarrez, parce que ſi l'on prenoit quatre quarrez, & qu'on les joignit enſemble, on ne feroit plus un angle ſolide, mais un ſeul plan. (5. 25.)

Prenant trois pentagones, on fera l'angle du dodecaédre : mais quatre pentagones ne peuvent faire un angle ſolide.

Enfin trois héxagones joints enſemble rempliſſant tous les quatre angles droits, ne peuvent faire d'angle ſolide, & trois heptagones, ou d'autres figures de plus de côtez le pourroient faire encore moins : ainſi en tout on ne peut faire que ces cinq corps réguliers, trois avec des triangles, un avec des quarrez, & un avec des pentagones.

LIVRE SIXIE'ME.

Des Proportions.

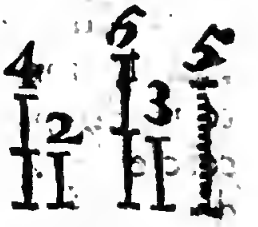
1. QUand on parle de *Grandeur*, & qu'on dit qu'une quantité eſt *grande*, on fait toûjours quelque comparaiſon de cette quantité avec quelque autre de même nature, à l'égard de laquelle elle eſt dite *grande*. Ainſi nous diſons d'une montagne, qu'elle eſt petite, & d'un diamant qu'il eſt grand, parce que nous comparons cette montagne avec les autres montagnes, en comparaiſon deſquelles elle eſt *petite*: & que de même nous comparons ce diamant avec les autres diamans, en comparaiſon deſquels nous diſons que celui-ci eſt *grand*.

2. Quand on conſidere ainſi une quantité en la comparant à une autre, pour voir quelle *grandeur* elle a en comparaiſon de cette autre; la grandeur que l'on trouve qu'a cette quantité ainſi en comparaiſon de l'autre, s'appelle *Raiſon*, quoi-que pour ſe faire mieux entendre il fallût dire *Comparaiſon*.

3. La quantité qu'on compare à une autre s'appelle *l'Antecedent*, & cette autre *le Conſequent*.

4. Quand de plus on conſidere quatre quan-

quantitez, & qu'on les compare deux à deux *a* 4 avec *b* 2, & *c* 6 avec *d* 3; ſi l'on trouve que *a* a autant de *grandeur* en comparaiſon de *b*, que *c* en a en comparaiſon de *d*: alors on dit que ces raiſons ſont égales; c'eſt-à-dire, que la raiſon d'*a* à *b* eſt égale à la raiſon de *c* à *d*; & que comme *a* a deux fois autant de grandeur que *b*; *c* auſſi a deux fois autant de grandeur que *d*.



a *b* *c* *d* *e*

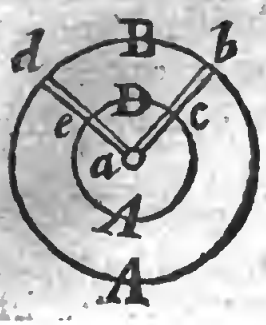
5. Mais ſi l'on trouve que *a* 4 ait plus de grandeur en comparaiſon de *b* 2, que *c* 6 n'en a en comparaiſon de *e* 5: par exemple, ſi l'on trouve que *a* 4 ayant deux fois autant de grandeur que *b* 2, *c* 6 n'en a pas deux fois autant que *e* 5; alors on dit que ces raiſons ſont inégales, & qu'*a* a *plus grande raiſon* à *b*, que *c* à *e*; de ſorte qu'*avoir plus grande raiſon* n'eſt autre choſe qu'avoir plus de grandeur en comparaiſon d'une ſeconde quantité, qu'une troiſiéme n'en a en comparaiſon d'une quatriéme.

6. L'égalité de raiſons s'appelle *Proportion*; & quand on trouve que de quatre quantitez, la premiére a autant de grandeur à raiſon de la ſeconde, que la troiſiéme en a à raiſon de la quatriéme, alors on dit que ces quatre quantitez ſont *proportionelles*.

Pour mieux faire comprendre tous les

myſteres des proportions, qui paſſent pour les plus difficiles de la Geometrie, comme ils en ſont ſans contredit les plus importans, je vai les expliquer par un exemple, qui tout ſeul rendra à mon avis fort intelligibles des choſes, qui d'ailleurs paroiſſent aſſez embarraſſées.

7. Imaginons le cercle *b* A *d* décrit par le mouvement de la ligne *a b* autour du point *a*; & de même ſoit le cercle *c A e* décrit par le mouvement d'un point *c* qui ſe trouve dans la ligne *a c b*; imaginons derechef que cette même ligne *a c b* tourne encore une autre fois, & ſe meut juſqu'en *a e d*; l'arc *b B d* ſoit appellé *B*; l'arc *c D e* ſoit appellé *D*; tout le cercle *b B* A ſoit nommé A; tout le cercle *c D A* ſoit nommé *A*: Maintenant ſi nous comparons d'une part tout le cercle A à l'arc *B*; & de l'autre tout le cercle *A* à l'arc *D*, nous trouverons manifeſtement que le cercle A, a autant de grandeur à raiſon de l'arc *B*, que le cercle *A* en a à raiſon de l'arc D, & que ſi *B* eſt la quatriéme ou la ſixiéme partie du cercle A, *D* auſſi ſera la quatriéme ou la ſixiéme partie du cercle *A*: ce qui s'énonce de la ſorte, *comme* A *eſt à B, ainſi A eſt à D,*

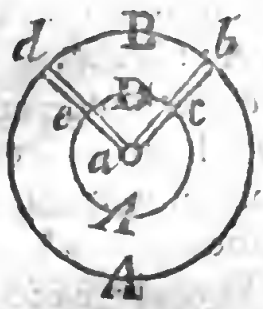


D, & pour abreger, nous le marquerons ainſi A. *B* : : D. *A*.

8. Si maintenant nous renverſons comparant *B* à A, & *D* à *A*, nous trouverons auſſi manifeſtement que *B*. A : : *D*. *A*. de ſorte que ſuppoſé que A. B : : *A*. *D*, nous tirons incontinent une concluſion qu'on appelle *invertendo* : donc *B*. A : : *D*. *A*.

9. Que ſi nous faiſons un échange en comparant un antecedent avec l'autre antecedent, & de même un conſequent avec l'autre conſequent, nous conclurons *alternando*, donc A. *A* : : *B*. *D*. Et ceci eſt bien manifeſte : car ſi tout le cercle A eſt double ou triple (ou en quelque autre raiſon que ce ſoit) du cercle *A*, l'arc *B* ſera auſſi double ou triple (ou enfin en même raiſon) de l'arc *D*. Ceci, dis-je, eſt manifeſte, puiſque les deux cercles A & *A* ſont décrits par le mouvement de la ligne *a c b*, en ſorte que *b* décrivant tout le cercle A, *c* décrit tout le cercle *A*, & *b* décrivant l'arc B, *c* décrit auſſi l'arc D ; & cela par un commun mouvement circulaire, ſinon que le point *c* ſe mouvant plus lentement que le point *b*, il décrit auſſi un cercle plus petit à proportion de la lenteur : & de même lorſque le point *b* aura décrit l'arc B, le point *c* aura pareillement décrit l'arc D, qui ſera plus petit à proportion de ſa lenteur.

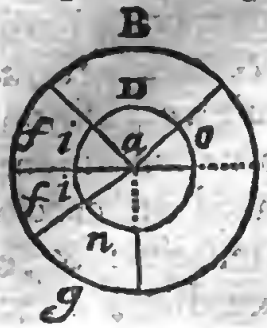
10. Si nous comparons les differences des antecedens & des conſequens avec les conſequens ; par exemple, A moins B, avec B, & A moins D, avec D, nous trouverons encore qu'il y a proportion, & que A moins B. B :: A moins D. D ; car il eſt bien manifeſte que l'arc *b* A *d* (qui eſt A moins B) eſt à l'arc B, comme l'arc *c A e* (qui eſt A moins D) eſt à l'arc D : & ceci s'appelle *Dividendo*.



11. Si nous joignons les antecedens avec les conſequens, nous trouverons que A plus B. B :: A plus D. D ; ce qui s'appelle *componendo*.

12. Que ſi nous concluons que A. A moins B : : A. A moins D, cela s'appellera *convertendo*.

13. Si nous prenons pluſieurs quantitez qui ſoient proportionelles deux à deux comme B. *f* : : D. *i*. & *f*. *g* : : *i*. *n*, *&c*. alors nous pouvons conclure, en prenant les premieres & les dernieres, que B. *g* : : D. *n* ; ce qui s'appelle *ex æquo ordonné*.



La propoſition qui ſuit eſt un peu embaraſſée, mais elle n'eſt pas d'importance, & on peut la laiſſer.

14. Mais

14. Mais ſi après avoir pris *f. g* : : *o.* D, c'eſt-à-dire, comme la penultiéme à la derniere dans le premier rang : : ainſi quelque autre quantité *o* à la premiere du ſecond rang, on conclud : donc B. *g* : : *o. i* ; c'eſt-à-dire, comme la premiere à la derniere dans le premier rang : ainſi cette autre quantité *o* à la penultiéme du ſecond rang ; alors cela s'appelle *ex æquo troublé*. Or cela ſe peut toujours conclure : car puiſque *f. g*, ou bien *i n* : : *o.* D. il ſera auſſi *alternando & invertendo o. i* : : D. *n*, ou bien : : B. *g*.

15. Si l'on prend B. autant de fois que D, par exemple, 3 B & 3 D, nous conclurons que B. D : : 3 B. 3 D. Et de même : : 10 B. à 10 *D*. ou bien : : 12 $\frac{1}{2}$ B. à 12 $\frac{1}{2}$ D ; & ainſi de quelque autre maniere qu'on multiplie ces deux grandeurs B. & D. pourveû qu'on les multiplie également, il y aura toûjours même raiſon entre ces grandeurs également multipliées, qu'entre ces grandeurs ſimples. Et ces grandeurs ainſi également multipliées s'appellent *Equimultiples* des ſimples B. & D, & l'on dit que les *Equimultiples* ſont entre elles comme les ſimples.

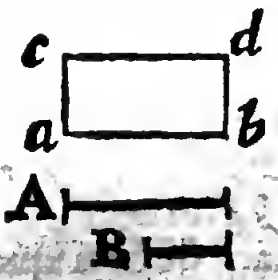
16. Si l'on partage B en même façon que D, & qu'on prenne, par exemple, une quatriéme partie de B, & une quatriéme

triéme partie de D, ou bien une dixiéme de B, & une dixiéme de D, ou telle autre partie ſemblable; ces parties auront même raiſon entre elles que les totales.

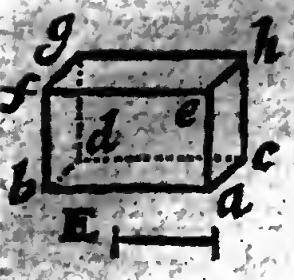
$B.\ D :: \frac{1}{3}B.\ \frac{1}{3}D :: \frac{1}{10}B.\ \frac{1}{10}D.$ *&c.*

Tout cela eſt naturellement connu.

17. *Multiplier* une ligne par une autre ligne, c'eſt faire un parallelogramme rectangle, qui ait pour les deux côtez contigus ces deux lignes. Par exemple; on multiplie la ligne A par la ligne B, en faiſant le rectangle *a b c d*, en ſorte que *a b* ou *c d* ſoit égal à A, & *b d*, ou *a c* ſoit égal à B.

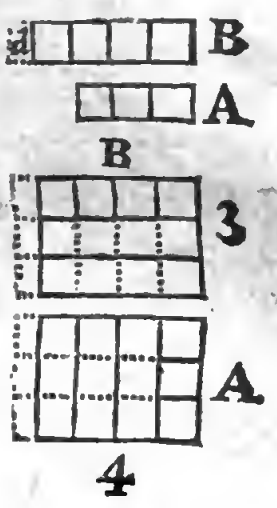


18. Multiplier un rectangle, ou une autre ſurface par une ligne, c'eſt faire un parallelepipede rectangle (5.9.) dont la baſe ſoit cette ſurface, & la hauteur perpendiculaire ſoit cette ligne. Par exemple, on multiplie la ſurface *a b d c* par la ligne E, en faiſant le ſolide *a b f g h e*, *&c.* en ſorte que ſa baſe ſoit la ſurface *a d*, & ſa hauteur *a e* ou *b f*, égale à E.



19. Pour bien concevoir ces multiplications, il faut imaginer deux lignes com-

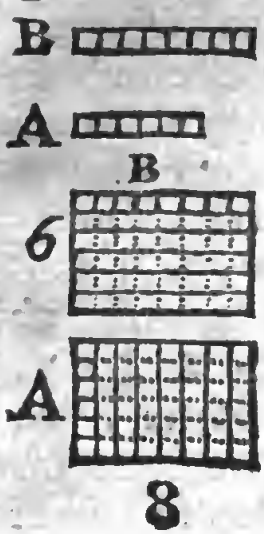
comme si elles avoient quelque largeur, & diviſer toute leur longueur en de petits quarrez, comme vous voyez en ces figures, où A eſt une ligne, ou plûtôt une regle compoſée de trois petits quarrez, & *B*, eſt une autre regle compoſée de quatre petits quarrez de même largeur que les trois d'A. Maintenant donc multiplier A par B, ou B par A, c'eſt prendre la regle B autant de fois qu'il y a de quarrez dans A, ou bien prendre A autant de fois qu'il y a de quarrez en B; ce qui revient au même. Ainſi B pris trois fois fait le premier rectangle, qui comprendra douze quarrez: & A pris quatre fois fera le ſecond rectangle, qui comprendra auſſi douze quarrez, & ſera tout-à-fait égal au premier.



2o. Il faut prendre garde que la même multiplication ſe fait encore, bien que dans la longueur de la ligne il ne ſe trouve point préciſément un certain nombre de petits quarrez; mais que ſi dans A, par exemple, il y a trois quarrez, & que dans B il y en ait quatre & demy, ou quatre, & telle autre partie, ou tel autre excés qu'on voudra, marqué icy *d*; on n'a qu'à prendre B trois fois pour mul-

multiplier B par A, & l'on aura le premier rectangle composé de douze quarrez, & de trois de ces excès *d*. Et de même multipliant A par B, c'eſt-à-dire, prenant A quatre fois & demi, ou bien quatre fois avec tel excés *d*. on aura le ſecond rectangle compoſé auſſi de douze quarrez & de trois *d*.

21. Que ſi l'on imagine que la ligne B ſe retreſſit de la moitié, en ſorte que ſa longueur demeurant toûjours la même, il ſe trouve qu'elle ait huit petits quarrez, (c'eſt-à-dire, que ſa longueur ſoit huit fois auſſi grande que ſa largeur) il ſe trouvera auſſi que retreciſſant de même la largeur d'A; il y aura dans A ſix petits quarrez: de ſorte que ſi l'on multiplie maintenant B par A, ou A par B, il ſe fera deux rectangles tout-à-fait égaux aux deux précedens. Car B pris ſix fois, fait le premier rectangle compoſé de quarante-huit petits quarrez; & A pris huit fois, fait le ſecond rectangle compoſé auſſi de quarante-huit quarrez: & ces quarante-huit quarrez ne valent ni plus ni moins que les douze des rectangles précedens, parce qu'un de ces douze en vaut quatre



tre de ces quarante-huit, comme il paroît dans la figure même. Ainſi quelque petite largeur que l'on donne à ces lignes, quand on les retreciroit à l'infini, il eſt manifeſte que les rectangles qu'elles feront, étant multipliées l'une par l'autre, ſeront toûjours les mêmes. De ſorte que l'on peut prendre hardiment les lignes comme indiviſibles, & les multiplier, en faiſant d'elles un rectangle, puiſque jamais la grandeur de ce rectangle ne varie, quelque petiteſſe que l'on donne à la largeur des lignes.

22. Il eſt fort aiſé d'appliquer tout ceci à la multiplication des ſolides : mais au lieu de quarrez, il faut imaginer des cubes : car ſi l'on penſe une ſurface compoſée de douze cubes ; & d'un autre côté, ſi l'on penſe de plus une ligne compoſée de deux cubes, on multipliera la ſurface douze par la ligne deux, en prenant cette même ſurface autant de fois qu'il y a de petits cubes dans la ligne, c'eſt-à-dire, deux fois, & alors il ſe fera un ſolide compoſé de vingt-quatre petits cubes.

23. De tout ceci il paroît que ces petits quarrez & ces petits cubes ſont dans la multiplication des lignes & des ſurfaces ce que les unitez ſont dans la multiplication des nombres : car multiplier un nom-

nombre par un autre, par exemple, 3 par 5, c'eſt prendre 3, autant de fois qu'il y a d'unitez en 5, ou bien prendre 5, autant de fois qu'il y a d'unitez en 3; ce qui produit quinze. Ainſi multiplier une ligne par une autre, c'eſt prendre une de ces lignes autant de fois qu'il y a de quarrez dans l'autre; & multiplier une ſurface par une ligne, c'eſt prendre cette ſurface autant de fois qu'il y a de cubes dans la ligne.

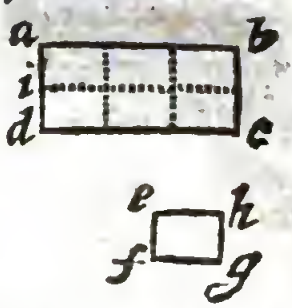
Dans un autre endroit on parlera des multiplications de ſurfaces par des ſurfaces, ou par des ſolides, d'où reſultent des compoſez, qu'on appelle de plus de trois dimenſions.

24. Toutes grandeurs ſe peuvent exprimer par des lignes: comme, ſi une grandeur eſt double ou triple d'une autre, ou en telle autre raiſon qu'on voudra, on n'a qu'à prendre deux lignes, dont l'une ſoit double ou triple de l'autre, ou en telle autre raiſon ſemblable à la raiſon des grandeurs. Ainſi pour exprimer deux temps, par exemple, une heure & deux heures, ou bien deux viteſſes, dont l'une ſoit double de l'autre, je n'ay qu'à prendre deux lignes, *a* double de *b*, & je pourrai dire qu'*a* repreſente deux heures; ou la grande vîteſſe, & *b* repreſente une heure, ou la petite vîteſſe,

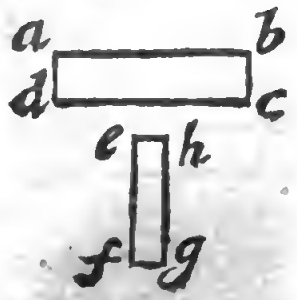
&

& agir ſur ces deux lignes comme je ferois ſur les heures, &c.

25. Pour connoître la proportion des rectangles, il faut connoître la raiſon de la longueur de l'un à la longueur de l'autre, & de plus la raiſon de la largeur de l'un à la largeur de l'autre: par exemple, pour connoître quelle raiſon a le rectangle *a c* au rectangle *e g*, il ne ſuffit pas de ſçavoir que la longueur *a b* eſt triple de *e h*, mais de plus il faut auſſi ſçavoir que *a d* eſt double de *e f*: car ſi l'on prend *a i* égal à *e f*, le rectangle *b i* ſera triple du rectangle *e g*, puiſque *a b* eſt triple de *e h*, & *a i* égal à *e f*. Et de plus, comme *i d* eſt encore égal à *a i*, ou à *e f*, (puiſqu'on ſuppoſe que *a d* eſt double de *a i*, ou de *e f*,) le rectangle *i c* ſera auſſi triple du rectangle *e g*. Ainſi tout le rectangle *a c* eſt deux fois triple du rectangle *e g*, c'eſt-à-dire, ſextuple, ou qu'il contient ſix fois le rectangle *e g*. Ce que j'ai dit de la raiſon double & triple des largeurs & des longueurs, ſe doit auſſi entendre de toute autre raiſon que ce ſoit: car ſi *a b* eſt quadruple de *e h*, & *a d* triple de *e f*, le rectangle *a c* ſera trois fois quadruple du rectangle

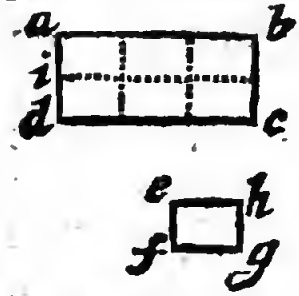


gle *e g*, c'eſt-à-dire, que *a c* ſera dodecuple de *e g*, ou le contiendra douze fois. Mais ſi *a b* eſt dodecuple de *e h*, & que *e f* ſoit triple de *a d*; alors il ſe fait une certaine compenſation. Car ſi ayant égard aux ſeules largeurs *a b* & *e h*, le rectangle *a c* a de l'avantage, & égale l'autre douze fois; d'autre part



néanmoins il perd cet avantage dans les hauteurs *a d* & *e f* où le rectangle *e g* doit égaler l'autre trois fois. Comparant donc l'avantage & le deſavantage, le rectangle *a c* étant d'une part douze fois auſſi grand, & d'autre part trois fois auſſi petit, reſte qu'il ſoit ſeulement quatre fois auſſi grand que *e g*.

26. C'eſt ce qu'on entend, lors qu'on dit que les rectangles ſont en *raiſon compoſée* de leurs côtez: car ſi *a b* eſt triple de *e h*, & *a d* double de *e f*; le rectan-

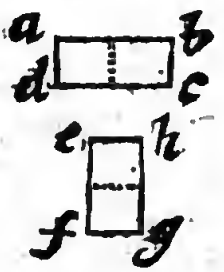


gle *a c* aura au rectangle *e g* une raiſon compoſée du triple & du double; c'eſt-à-dire, qu'il ſera deux fois triple: ou trois fois double, ou en un mot ſextuple. De même ſi *a b* eſt quadruple de *e h*, & *a d* triple de *e f*, ce rectangle

tangle *a c* aura au rectangle *e g* une raiſon compoſée du quadruple & du triple, en ſorte qu'il ſera trois fois quadruple, ou quatre fois triple, ou en un mot dodecuple. De même ſi *a b* eſt dodecuple de *e h*, & *a d* ſubtriple de *e f*. (c'eſt-à-dire, que *e f* ſoit triple de *a d*) la raiſon du rectangle *a c* au rectangle *c g* ſera compoſée de la raiſon dodecuple & de la raiſon ſubtriple, en ſorte que *a c* ſera douze fois ſubtriple ou ſubtriplement dodecuple, ou en un mot quadruple de *e g*.

Si l'on prend douze fois la troiſiéme partie d'un écu, on fait quatre écus: de ſorte que quatre écus ſont douze fois ſubtriples d'un écu, c'eſt-à-dire, ſont douze fois la troiſiéme partie d'un écu.

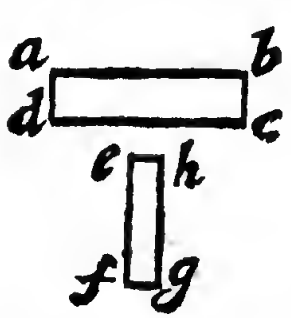
27. De là il paroît que ſi les côtez de deux rectangles ſont reciproquement proportionels, les rectangles ſont égaux: car ſi *a b* eſt double de *e h*, & que reciproquement *b g* ſoit double de *b c*; ou bien ſi *a b* eſt triple de *e h* & *b g* triple de *b c*, ou enfin ſi quelque raiſon qu'ait *a b* à *e h*, *h g* ait auſſi cette même raiſon à *b c*, il eſt bien manifeſte que d'autant que le rectangle *a c* ſurpaſſe l'autre en longueur, d'autant auſſi



eſt

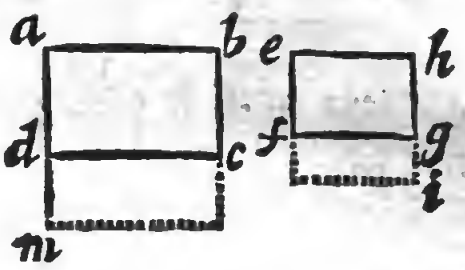
eſt il ſurpaſſé en largeur. Ainſi la longueur compenſant la largeur, l'un & l'autre eſt égal: d'où l'on tire cette propoſition trés-importante.

28. S'il y a quatre grandeurs proportionnelles, ce qui provient de la multiplication des deux moyennes, eſt toûjours égal à ce qui provient de la multiplication des deux extrêmes; comme ſi *a b. e h :: h g. b c*, je dis qu'en multipliant les extrêmes *a b*, & *b c*, pour en faire le rectangle *a c*, & en multipliant les moyennes *e h* & *h g*, pour en faire le rectangle *e g*, ces deux rectangles *a e* & *e g* ſeront égaux. (6. 7.) Ce qui ſe fait par lignes & par rectangles, ſe fait auſſi par quelque autre grandeur que ce ſoit, puiſque toutes grandeurs ſe peuvent exprimer par lignes, & toutes multiplications de grandeurs par multiplications de lignes, c'eſt-à-dire, par des rectangles. (6. 24.)



29. Lorſque les rectangles ont leurs côtez proportionnels, en ſorte que *a b. e h :: a d. e f*, on dit alors que le rectangle *a c* eſt au rectangle *e g*, en *raiſon doublée* de la raiſon de leurs côtez: car la raiſon de *a c* à *e g*, eſt compoſée de la raiſon de *a b* à *e h*, & de la raiſon

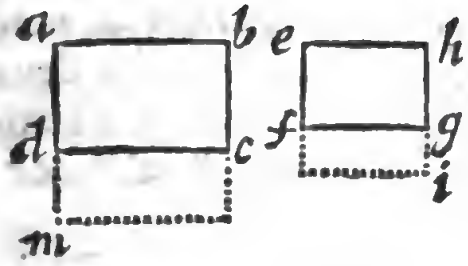
ſon de *a d* à *e f*. (*6. 26.*) Or la raiſon de *a b* à *e h* eſt ici (par l'hypotheſe) la même que la raiſon de *a d* à *e f* : ainſi pour avoir la raiſon du rectangle *a c* au rectangle *e g*, il ſuffit de prendre deux fois la raiſon de *a b* à *e h*. Par exemple, ſi *a b* eſt double de *e h*, & *a d* double de *e f*, le rectangle *a c* ſera deux fois double, c'eſt-à-dire, quadruple du rectangle *e g* : & ſi *a b* eſt triple de *e h*, & *a d* triple de *e f*; *a c* ſera trois fois triple de *e g*, c'eſt-à-dire, nonecuple : & ſi *a b* eſt quadruple de *e h*, *a c* ſera quatre fois quadruple, c'eſt-à-dire, ſexdecuple de *e g*.



30. Si l'on prend une troiſiéme ligne *n o* proportionnelle, en ſorte que *a b*. *e h* : : *e h*. *n o*. *n*-------*o* les deux rectangles *a c*, & *e g*, ſeront comme les lignes *a b*, & *n o*. Car *a b* à *n o*, eſt en raiſon doublée d'*a b* à *e h*. Et ſi *a b* eſt double, ou triple, ou quadruple d'*e h*; *a b* ſera deux fois double, ou trois fois triple, ou quatre fois quadruple, de *n o*

31. Ces rectangles qui ont ainſi leurs

côtez proportionnels *a b. e h : : a d. e f*, s'appellent *ſemblables* : dont les côtez *homologues* ſont ceux qui ſe répondent dans la proportion, comme *a b* & *e h*, ou bien *a d* & *e f* : car ſi *a b* eſt le plus grand côté du rectangle *a c*, *e h* ſera auſſi le plus grand côté du rectangle *e g*.



32. Tous les quarrez ſont des rectangles ſemblables : car il eſt bien manifeſte, que ſi *a b* eſt double ou triple, *&c.* de *e h*; *a m* ſera auſſi double ou triple de *h i*, puiſque *a m* eſt égal à *a b*, & *h i* à *e h*.

33. Tous les rectangles ſemblables ſont entre eux, comme les quarrez bâtis ſur leurs côtez homologues. Je dis que le rectangle *a c* eſt au rectangle *e g*, comme le quarré *b m* au quarré *e i* : car tant ces quarrez que ces rectangles, ſont entre eux en raiſon doublée de *a b* à *e h*. (6. 29. 32.)

34. Pour connoître la raiſon de deux ſolides parallelepipedes rectangles, il faut connoître la raiſon de la baſe de l'un à la baſe de l'autre, & de plus la raiſon de la hauteur de l'un à la hauteur de l'autre : parce que la raiſon de tout

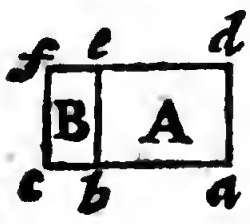
tout un ſolide à l'autre eſt compoſée des raiſons des longueurs, largeurs & hauteurs ; ce qui eſt aiſé à comprendre, ſi l'on a compris ce qui a été dit des raiſons des rectangles. Car ſi un parallelepipede a ſa baſe double de la baſe d'un ſecond parallelepipede, & la hauteur triple de la hauteur ; le premier parallelepipede ſera deux fois triple, ou trois fois double, ou en un mot ſextuple du ſecond.

35. Si les baſes de deux parallelepipedes rectangles ſont réciproquement comme leurs hauteurs, les parallelepipedes ſont égaux ; cela ſe prouve comme la vingt-ſeptiéme de ce livre : car d'autant que l'un ſurpaſſe l'autre en largeur & en longueur, d'autant eſt-il ſurpaſſé en hauteur.

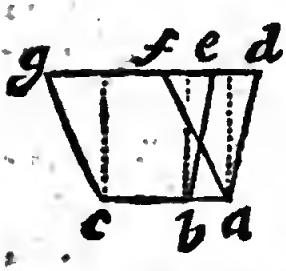
36. Lorſque les parallelepipedes rectangles ont tous leurs côtez proportionnels, on les appelle *ſemblables*, & ils ſont en *raiſon triplée* de leurs côtez, comme on dit des parallelogrammes, qu'ils ſont en *raiſon doublée*.

37. Les parallelepipedes rectangles ſemblables ſont entre eux comme les cubes bâtis ſur les côtez homologues : car tant les cubes que les parallelepipedes, ſont entre eux en raiſon triplée de leurs côtez homologues.

38. Les rectangles qui ont même hauteur ſont entre eux en raiſon de leurs baſes. Soient les rectangles A & B entre les paralleles *d f* & *a c*, en ſorte que *a d* ſoit égal à *c f*; je dis que A. B : : *a b*. *b c*, c'eſt-à-dire, que le rectangle A eſt au rectangle B, comme la baſe *a b* eſt à la baſe *b c*. Que ſi, par exemple, *a b* eſt double de *b c*, A ſera auſſi double de B; & ſi *a b* eſt triple ou quadruple de *b c*, A auſſi ſera triple ou quadruple de B: car A n'eſt que la ligne *a b* multipliée par *a d*, (6. 17.) & B n'eſt que la ligne *b c*, multipliée par la même *a d* ou *b e* qui lui eſt égale. Donc (6. 15.) A. B : : *a b*. *b c*.



39. Tous parallelogrammes, qui ſont entre mêmes paralleles, ſont entre eux comme leurs baſes. Je dis que le parallelogramme *a d e b* eſt au parallelogramme *a f g e*, comme *a b* à *a c*: car ayant fait des rectangles pointillez ſur les mêmes baſes, ces rectangles ſont égaux aux parallelogrammes. (3. 14.) Or ces rectangles ſont comme leurs baſes: (par la précedente) Donc les parallelogrammes auſſi ſont comme leurs baſes, c'eſt à ſçavoir, *a d e b*. *a f g c* : : *a b*. *a c*.

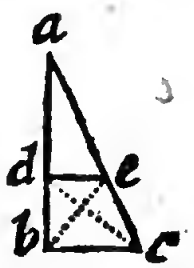


40. Les

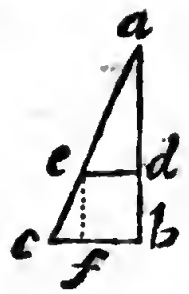
40. Les triangles qui ſont entre mêmes paralleles ſont comme les baſes, car ils ſont la moitié des parallelogrammes.

41. Quand les triangles ont leurs baſes ſur une même ligne droite, & que leur ſommet aboutit à un même point, ils ſont cenſez être entre mêmes paralleles, comme *a d e*, & *c d e*, ou bien *a d e*, & *b d e*.

42. Si dans un triangle on tire une ligne parallele à la baſe, cette ligne coupera les jambes proportionnellement. Soit le triangle *a b c*, & la ligne *d e* parallele à *b c*, je dis que *a d. a e* : : *a b. a c.* & : : *d b. e c.* Car ſi l'on imagine les lignes *c d* & *e b*, le triangle *c e d* ſera au triangle *e a d*, comme *c e* à *e a*: (6. 40. 41.) de même le triangle *b d e* au triangle *d a e*, eſt comme *b d* à *d a*. Or le triangle *c e d* eſt égal au triangle *b d e*: (3. 16.) donc auſſi le triangle *b d e* ou *c e d* eſt au triangle *e a d* : : comme *b d* à *d a*, ou comme *c e* à *c a*: donc encore *b d. d a* : : *c e. e a*, puiſque tant la raiſon de *b d* à *d a*, que celle de *c e* à *e a*, expriment une même raiſon du triangle *b e d* ou *c e d* au triangle *e a d*.

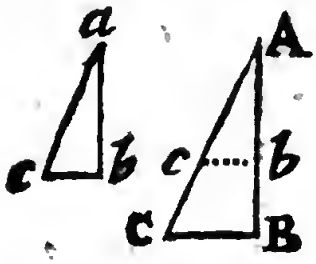


43. Si dans un triangle *a c b*, on tire une ligne *d e*. parallele à la baſe *c b*, je



dis que *e d. c b* : : *a d*, *a b*, ou : : *a e. a c.* car tirant *e f* parallele à *a b*, on aura *f b* égale à *e d* (1. 9.) Or par la précedente *f b. c b* : : *e a. c a* : : donc *e d*, *c b* : : *e a. c a* : : ou *d a. b a*,

44. On appelle *Triangles ſemblables* ceux qui ont tous les trois angles égaux, c'eſt-à-dire, ceux de l'un à ceux de l'autre, encore que les triangles ſoient inégaux.



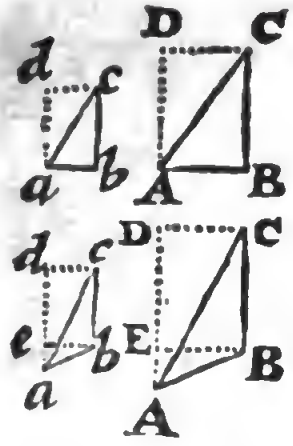
Par exemple, ſi l'angle A eſt égal à l'angle *a*. & l'angle B à l'angle *b*, & l'angle C à l'angle *c*, tout le triangle A B C ſera ſemblable au triangle *a b c*.

45. Quand on a trouvé que deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun, on aura auſſi trouvé que le troiſiéme angle ſera égal, & que les triangles ſeront ſemblables : car puiſque les trois angles dans chaque triangle ſont la valeur de deux droits, (2. 9) ſi les deux angles d'un triangle ſont égaux aux deux d'un autre triangle, il faut que le troiſiéme angle de l'un, ſoit égal au troiſiéme de l'autre.

46. Tous les triangles ſemblables ont leurs côtez (autour des angles égaux) pro-

proportionnels. Je dis que A B. *a b* : : A C. *a c* : : B C. *b c*. Car ſi dans le plus grand triangle A B C on prend A b égal à *a b*, & A c égal à *a c*, le triangle A b c ſera tout égal au triangle *a b c*; (2. 11) ainſi l'angle A b c eſt égal à l'angle *a b c*: (2. 11.) donc auſſi il eſt égal à l'angle B, lequel par l'hypotheſe l'eſt à l'angle *b*: donc la ligne b c eſt parallele à la ligne B C: (1. 31.) donc (6. 42. 43.) A b. A B : : A c. A C : : b c. B C.

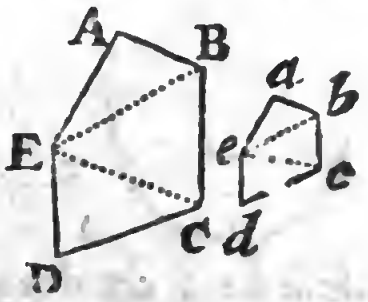
47. Tous les triangles ſemblables ſont entre eux en raiſon doublée de leurs côtez homologues, ou comme les quarrez bâtis ſur leurs côtez homologues. Soit *a b c* ſemblable à A B C, en ſorte que *a b*. A B : : *b c*. B C. Premierement, ſi *b* & B ſont angles droits, ſoient achevez les rectangles *b c d a*, & B C D A, ces rectangles *b d* & B D ſeront entre eux en raiſon doublée du côté *b c*, au côté homologue B C, ou comme le quarré bâti ſur *b c*, au quarré bâti ſur B C. (6. 29. 33.) Or le triangle *a b c* eſt la moitié du rectangle *b c d*, (3. 8.) & le triangle A B C eſt la moitié du rectangle B C D: (3. 8.) donc auſſi ces



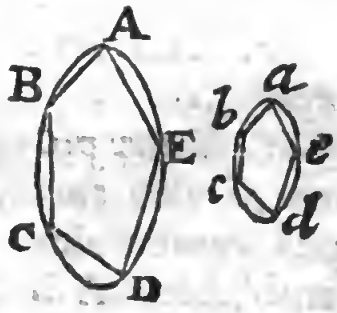
ces deux triangles ſont entre eux en raiſon doublée des côtez homologues, *&c.* Secondement, ſi les triangles ne ſont point rectangles, comme dans les ſecondes figures, ſoient tirées les paralleles *a d* & A D, & puis ſoient faits les rectangles *b c d e* & B C D E, 1. Les triangles *a d c*, & A D C ſeront ſemblables, à cauſe que l'angle *d* eſt égal à l'angle D, étant tous deux droits. Et de plus, l'angle *d a c* eſt égal à l'angle D A C, à cauſe qu'ils ſont égaux aux angles *a c b*, & A C B: (1. 31.) Donc *a c*. A C :: *c d*. C D. (6. 46) Or *a c*. A C :: *b c* B C: (par l'hypotheſe) donc *c d*. C D :: *b c*. B C :: & par conſequent auſſi les rectangles *b d* & B D ſont ſemblables, (6. 31.) & ſont entre eux comme les quarrez de leurs côtez homologues: (6. 33.) donc auſſi leurs moitiez, c'eſt-à-dire, (3. 18.) les triangles *a b c* & A B C ſont en raiſon doublée de leurs côtez homologues, ou comme les quatrez; *&c*

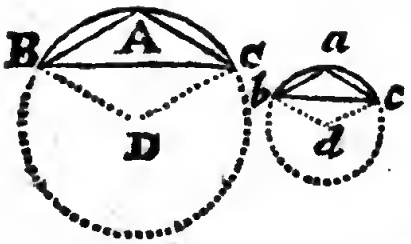
48. Les *Polygones ſemblables* ſont ceux qui ont autant de côtez les uns que les autres, en telle ſorte que chaque angle

angle d'un polygone ſoit égal à chaque angle de l'autre, & que tous leurs côtez autour des angles égaux ſoient proportionnels, comme ſi l'angle A eſt égal à l'angle *a*, & l'angle B à l'angle *b*, *&c.* & de plus que A B. *a b* :: B C. *b c* :: C D. *c d*, *&c.* Ces deux polygones ſont ſemblables.



49. Et parmi les curvilignes, ou les mixtes, *figures ſemblables* ſont celles dans leſquelles ou peut inſcrire, & autour deſquelles on peut circonſcrire des polygones ſemblables : en ſorte que quelque polygone qu'on ait inſcrit ou circonſcrit en l'une, on en puiſſe inſcrire ou circonſcrire un ſemblable en l'autre. Par exemple, ſi ayant inſcrit quelque polygone qu'il m'a plû, comme A B C D E, dans la grande curviligne, j'en puis inſcrire un autre tout ſemblable dans la petite curviligne, *a b c d e*, ces deux curvilignes ſeront ſemblables. De même, ſi ayant pris deux mixtes, comme deux ſegmens de cercle A B C, & *a b c*, & ayant inſcrit





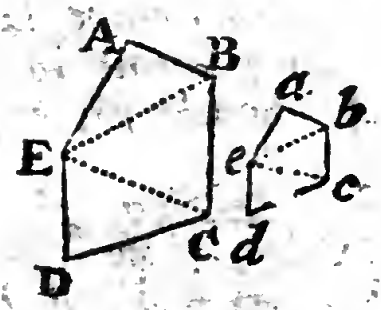
inſcrit en l'un un triangle tel qu'il m'a plû, A B C, j'en puis inſcrire en l'autre un autre tout ſemblable *a b c*, ces deux ſegmens ſeront ſemblables; & ayant achevé les cercles, ces ſegmens ſeront égales portions de ces cercles, en ſorte que ſi l'arc B A C eſt la troiſiéme partie de ſon cercle; l'arc auſſi *b a c* ſera la troiſiéme partie de ſon cercle: & ſi vers le centre on tire des lignes B D, C D, *b d*, *c d*, les angles D & *d* ſeront égaux. (Voyez 4. 11. & ſuivans.)

50. Tous les cercles ſont figures ſemblables.

51. Tous polygones ſemblables ſe peuvent diviſer en un égal nombre de triangles ſemblables. Soient les polygones ſemblables A B C D E, & *a b c d e*; le premier ſoit diviſé en ſes triangles par les lignes B E, C E: (3. 24.) je dis que l'autre étant auſſi diviſé en triangles par les lignes *b e*, & *c e*, tous les triangles de l'un ſeront ſemblables aux triangles de l'autre. Par exemple, *a b e* à A B E, car l'angle *a* eſt égal à l'angle A, (par l'hypotheſe) & de plus A B. *a b*:: A E. *a e*: (auſſi par l'hypotheſe) donc le triangle A B E eſt ſemblable à *a b e*,

(6. 46.)

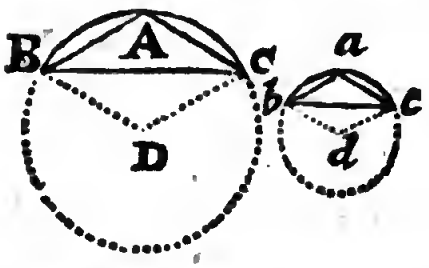
(6. 46.) On prouve enſuite que l'angle E B C eſt égal à l'angle *e b c*, à cauſe que l'angle A B C a été ſuppoſé égal à *a b c*, & que par ce qui vient d'être prouvé, l'angle *a b e* eſt égal à l'angle A B E : donc, de choſes égales ôtant choſes égales, l'angle E B C eſt égal à l'angle *e b c*. De même, on prouve que l'angle *e c b* eſt égal à l'angle E C B, & par conſequent (6. 45.) tout le triangle *e b c* ſera ſemblable au triangle E B C, ainſi de tous les autres.



52. Tous polygones ſemblables ſont entre eux en raiſon doublée de leurs côtez homologues, ou comme les quarrez bâtis ſur leurs côtez homologues. Je dis que comme le quarré d'A B eſt au quarré d'*a b*, ainſi tout le polygone A B C D E eſt au polygone *a b c d e* : car tous les triangles d'un polygone étant ſemblables à ceux de l'autre, (6. 51.) tous ceux de l'un ſont à tous ceux de l'autre en raiſon doublée de quelques-uns de leurs côtez homologues quels qu'ils ſoient, c'eſt-à-dire, comme le quarré d'A B, au quarré d'*a b*.

53. Toutes figures ſemblables, même les curvilignes, ſont entre elles comme

les quarrez bâtis ſur quelque côté de quelques figures ſemblables que ce ſoit qu'on y auroit inſcrites ou circonſcrites. Soient par exemple les cercles dans



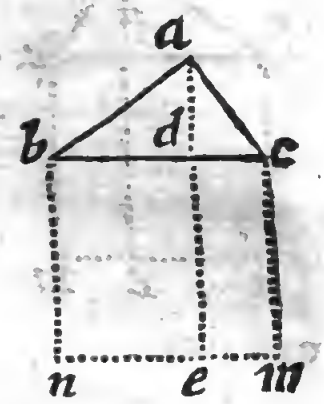
leſquels on ait inſcrit deux triangles ſemblables *b a c* & B A C, je dis que tout le cercle A B C eſt au cercle *a b c*, comme le quarré de B C au quarré de *b c*, ou ce qui eſt le même, comme le quarré du demi-diametre D B, au quarré du demi-diametre *d b*: car dans le cercle *a b c* on peut (du moins par la penſée) inſcrire ou circonſcrire tel polygone qu'on voudra. (4. 30.) Or tout polygone inſcrit dans *a b c* aura plus petite raiſon au cercle A B C, que le quarré ſur *b c* au quarré ſur B C, & tout circonſcrit dans *a b c* aura plus grande raiſon au cercle A B C, comme on prouvera aiſément par la précedente, & par ce qui a été dit du cercle au livre quatriéme: donc, *&c.*

54. Tout ceci s'applique aux ſolides. *Solides ſemblables* ſont ceux qui ont les angles égaux, & les côtez proportionnels, ou dans leſquels on inſcrit ou circonſcrit, *&c.*

55. Les ſolides ſemblables ſont entre eux

eux comme les cubes, *&c.* Voyez 6. 36. 37. &c.

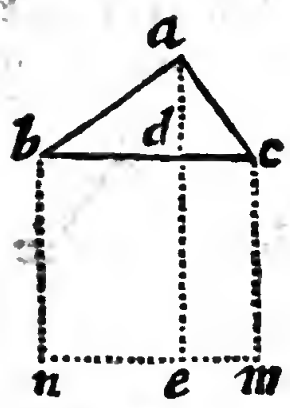
56. Si dans un triangle rectangle *a b c*, on tire du ſommet de l'angle droit *a* une perpendiculaire *a d* ſur l'*hypotenuſe* (ou grand côté) *b c*, on aura trois triangles rectangles tous ſemblables, ſçavoir, *a d c*, *a d b*, & le total *b a c*: car 1. tous ces trois triangles ont chacun un angle droit; 2. les triangles *a b c* & *a b d* ont l'angle *b* commun: donc ils ſont ſemblables; (6. 45.) 3. les triangles *a b c* & *a d c* ont l'angle *c* commun: donc ils ſont ſemblables.



57. La perpendiculaire *a d* eſt moyenne proportionnelle entre *c d* & *d b*, c'eſt-à-dire, que *c d. d a :: d a. d b.* Car les triangles *c d a* & *a d b* étant ſemblables par la précedente, *c d*, (qui eſt la petite jambe du triangle *c d a*) ſera à *d a* (qui en eſt la grande jambe) comme *a d* (qui eſt la petite jambe du triangle *a d b*) à *d b* qui en eſt la grande jambe. (6. 46.)

58. Le quarré d'*a d* eſt égal au rectangle fait de *c d* & de *d b*: car puiſque *c d. d a : : d a: d b*, (par la précedente) le rectangle des extrêmes *c d* & *d b*

ſera égal au rectangle des moyennes *d a* & *d a*, (6. 18.) Or les deux côtez de ce rectangle étant égaux, puiſque ce n'eſt que *d a* pris deux fois, il faut que ce rectangle ſoit le quarré de *d a*; & ainſi on peut mettre pour propoſition génerale, que ....



59. Le quarré de la moyenne proportionnelle eſt toûjours égal au rectangle fait des deux extrêmes.

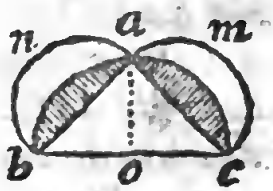
60. Pour exprimer un rectangle, il ſuffit de nommer trois lettres. Par exemple, quand on met le *rectangle b d c*, cela veut dire le rectangle, dont un côté eſt *b d*, & l'autre *d c*; & ſi l'on diſoit *le rectangle b c d*, cela voudroit dire le rectangle, dont un côté ſeroit *b c*, & l'autre *c d*.

61. Dans tout triangle rectangle le quarré fait ſur l'*hypotenuſe* (ou ſur le grand côté) eſt égal aux deux quarrez faits ſur les *jambes*. (ou ſur les autres côtez) Soit le quarré *b c m n* diviſé par la perpendiculaire *a d e* en deux rectangles *d e m*, & *d e n*: je dis que le rectangle *d e m* eſt égal au quarré d'*a c*, & le rectangle *d e n* au quarre d'*a b*; & que par conſequent tout le quarré *b c m n* eſt égal aux quarrez

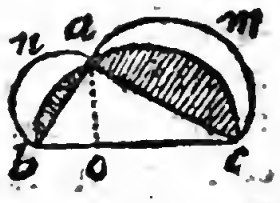
de

de *a c* & de *a b*: car 1. les deux triangles *a d c* & *b a c* étant ſemblables, (6, 56.) *d c* à *a c* (dans le petit triangle *a d c*) ſera comme *a c* à *b c*: (dans le grand triangle *b a c*) donc *a e* eſt moyenne proportionnelle entre *d e* & *b c*, ou *c m*; ainſi le quarré *a c* eſt égal au rectangle *d c m* (6. 59.) 2. Par même raiſon, on prouve que *b a* eſt moyenne proportionnelle entre *b d* & *b c*, ou *b n*, *&c.*

62 Si ſur les trois côtez du triangle rectangle on bâtit trois figures ſemblables poſées ſemblablement, la plus grande ſera égale aux deux autres; car ces figures ſemblables étant comme les quarrez faits ſur leurs côtez homologues (6. 51.) la figure A ſera aux figures B & C, comme le quarré de *b c* eſt aux quarrez de *c a* & de *a b*. Or le quarré de *b c* eſt égal aux deux autres: (par la précedeute) donc, *&c.*

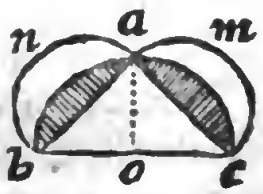


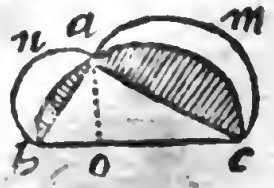
63. Si ſur le grand côté *b c* on fait un demi-cercle *b a c*, & ſur les autres côtez deux autres demi-cercles *b n a*



&

& *a m c*, ce grand demi-cercle ſera égal aux deux autres. (par la précédente) Que ſi de part & d'autre on ôte ce qui eſt commun, qui ſont les ſegmens hachez *b a*, & *a c*, ce qui reſtera de part & d'autre ſera égal ; c'eſt-à-dire, le triangle *b a c* d'une part ſera égal aux deux lunes *b n a* & *a m c* de l'autre : & c'eſt là la quadrature des *Lunes d'Hippocrate de Scio.*

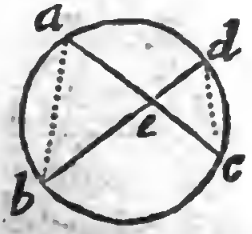




64. Lorſque le triangle *b a c* eſt iſoſcele, les lunes ſont égales ; de ſorte que le triangle *b a o*, qui eſt la moitié de *b a c*, ſera égal à chaque lune : mais lorſque le triangle eſt ſcalene, comme dans la ſeconde figure, les lunes ſont inégales, & il eſt auſſi difficile de partager le triangle *b a c* en deux par la ligne *a o*, en ſorte qu'on démontre que le triangle *b a o* eſt égal à la lune *b n a*, & le triangle *o a c* à la lune *c m a* : il eſt, dis-je, auſſi difficile de faire cela, que de trouver la quadrature du cercle.

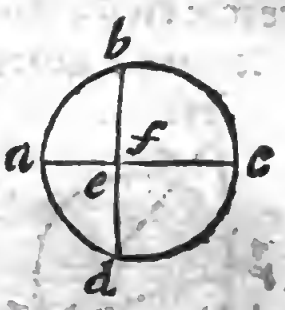
65. Deux cordes qui ſe croiſſent dans un cercle, ont leurs ſegmens *réciproques*, c'eſt-à-dire, réciproquement proportionnels. Je dis que *a e. b e : : e d e c* : & que par conſequent le rectangle *a e c* eſt égal au rec-

rectangle *b e d*: car ſi l'on imagine les lignes *d c* & *b a*, on aura deux triangles ſemblables, *a e b* & *d e c*. Car 1. ils ont un angle vers *e* oppoſé par la pointe, & par conſequent égal; (1. 23.)

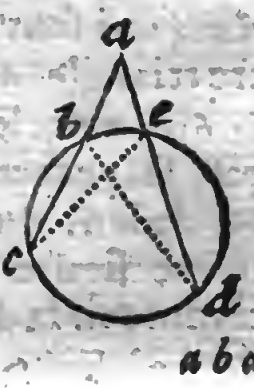


2. l'angle *d* eſt égal à l'angle *a* (4. 12.) comme inſiſtant ſur le même arc *b c*, & aboutiſſant à la même circonference: donc ces deux triangles ſont ſemblables; ainſi *a e. b e* :: *e d. e c*, (6. 46.)

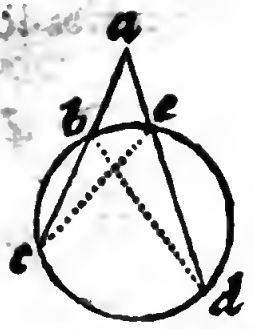
66. Si *a c* eſt diametre du cercle & *d b* perpendiculaire, *d e* ou *b e* ſera moyenne proportionnelle entre *a e* & *e c*, à cauſe que *d e* ſera égale à *e b*: (4. 6.) ainſi *a e. d e* :: *b e* ou *d e. e c*, & le quarré *d e* ſera égal ou rectangle *a e c*.



67. Deux lignes tirées d'un point exterieur vers un cercle, à la circonference duquel elles ſont terminées, ſont entre elles réciproquement comme leurs ſegmens exterieurs: je dis que *a c. a d* :: *a e. a b*, & que par conſequent le rectangle *c a b* eſt égal au rectangle *d a e*: car ſi l'on imagine les lignes *b d* & *e c*, on aura deux triangles ſemblables

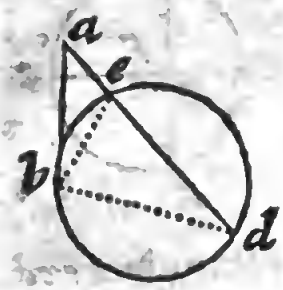


a b d



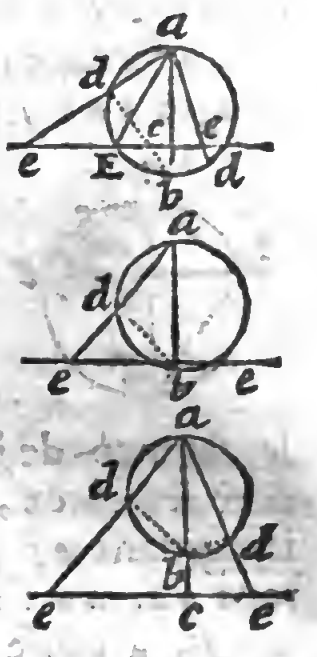
a b d & *a e c*: car 1. ils ont un angle commun *a*; 2. l'angle *d* eſt égal à l'angle *c*, (4. 12.) comme inſiſtant ſur un même arc *b e*: donc les triangles *a b d* & *a e c* ſont ſemblables (6. 4.) ainſi *a d* *a c* : : (qui ſont les grands côtez des deux triangles) : : *a b*. *a e*, (qui ſont les petits côtez des mêmes triangles.)

68. Si l'une de ces lignes *a b* touche le cercle en *b*, tandis que l'autre le coupe en *e* & en *d*, alors *a b* eſt moyenne proportionnelle entre *a e* & *a d*: car ayant tiré les lignes *b e* & *b d*, les triangles *a b d* & *a e b* ſeront ſemblables, à cauſe que 1. ils ont un angle commun en *a*; 2. l'angle *a b e* eſt égal à l'angle *b d e*: (4. 17.) donc ces deux triangles étant ſemblables, *a e*. *a b* : : (qui ſont les deux côtez du petit triangle *a b e*) : : *a b*. *a d* (qui ſont les côtez homologues de l'autre triangle *a d b*.)



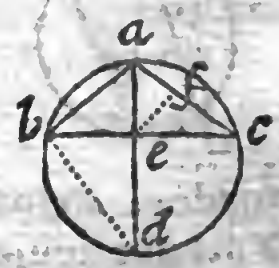
69. Soit le diametre *a b* coupé en *e* par la perpendiculaire infinie *e e*, ou au dedans du cercle, comme en la premiere figure, ou à la circonference, comme en la deuxiéme figure, ou hors le cer-

cercle, comme en la troiſiéme figure: ſoit de plus du point *a* tirée telle ligne droite que l'on voudra, coupant la perpendiculaire en *e*, & le cercle en *d*; je dis que toûjours *a d. a c* : : *a b. a e.* Car ſi l'on tire la ligne *b d*, on aura deux triangles ſemblables *e a c* & *d a b*, à cauſe que 1. ils ont un angle commun *e a c* & *d a b*; 2. ils en ont un autre droit, car l'angle *a c e* eſt droit, (par l'hypotheſe) & l'angle *b d a* eſt auſſi droit: (4. 14.) donc ces deux triangles étant ſemblables, *a d. a c* : : *a b a e.*

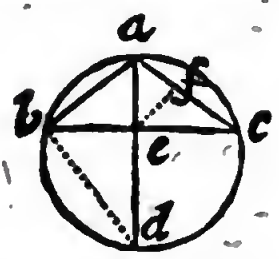


70. Dans la deuxiéme figure, *a b* eſt toûjours moyenne proportionnelle entre *a d* & *a e*; & dans la premiere, la moyenne eſt *a E* où le cercle coupe la ligne *c e*.

71. Si dans le triangle inſcrit, l'angle *b a c* eſt partagé en deux également par la ligne *a e d*, je dis que *b a. a e* : : *a d. a c*: car ayant tiré la ligne *b d*, on aura deux triangles ſemblables *a b d* & *a e c*, à cauſe que 1. l'angle *d* eſt égal à l'angle *c*, (4. 12.) comme inſiſtant ſur le même

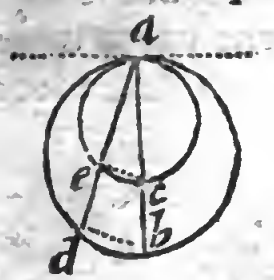


même arc *a b*, & aboutiſſant à la même circonference; ∴ l'angle *b a d* eſt égal à l'angle *e a c*, par l'hypotheſe : donc ces deux triangles ſont ſemblables: & partant *a b. a d* : : *a e. a c.*



72. Lorſque l'angle du ſommet eſt ainſi partagé en deux également, les ſegmens de la baſe ſont proportionnels avec les côtez, *b a. a c* : : *b e. e c* : car imaginant *e f* parallele à *b a*, nous aurons *b a. a c* : : *e f, f c.* Or *e f* eſt égal à *a f*, à cauſe que l'angle *a e f* eſt égal à l'angle *e a b*, (1. 31.) & par conſequent à l'angle *e a f*: ainſi le triangle *a f e* eſt iſoſcele; (2. 15.) ainſi au lieu de mettre *b a. a c* : : *e f. f c* : : nous pouvons mettre *b a. a c* : : *a f. f c* : ou bien (6. 42.) *b e. e c* : : ce qu'il falloit prouver.

73. Si deux cercles ſe touchent l'un dans l'autre, & que du point d atouchement *a* on tire une tangente & la perpendiculaire *a c b*, laquelle paſſera par les centres des deux cercles (4. 5.) & que de plus on tire telle autre ligne que l'on voudra, coupant les deux cercles en *e* & *d*, je dis que toûjours *a e. a d* : : *a c. a b*: car



car ayant tiré les lignes *e c* & *d b*, les triangles *a e c* & *a d b* seront semblables ayant un angle commun en *a*, & un autre droit en *e* & en *d*. (4. 14.)

74. L'arc *e c* sera aussi à l'arc *d b*, comme tout le cercle *a e c* au cercle *a d b*, (6. 49. & 4. 11. *&c.*)

LIVRE SEPTIEME.

Des Incommenſurables.

1. UNe petite quantité eſt dite en *meſurer* une autre plus grande, lorſque la petite étant priſe un certain nombre de fois, égale préciſément la plus grande. Par exemple, ſuppoſé qu'une toiſe contienne ſix pieds, un pied *meſurera* la toiſe, parce qu'un pied pris ſix fois, égale préciſément la toiſe.

2. La quantité qui en meſure une plus grande, s'appelle *Partie* de la grande, & la grande s'appelle *Multiple* de la petite: ainſi un pied eſt partie de la toiſe, & la toiſe eſt multiple du pied.

3. Si l'on prend une grandeur d'un pas qui contienne deux pieds & demi, & qu'on veüille eſſayer d'en meſurer la toiſe, on ne pourra pas le faire, parce que ſi l'on prend ce pas ſeulement deux fois, on ne fera que cinq pieds, qui ne valent pas la toiſe: & ſi l'on prend ce même pas trois fois, on aura ſept pieds & demi, qui ſurpaſſeront la toiſe; ainſi cette

cette quantité de deux pieds & demi ne mesure pas la toise, & n'est pas à proprement parler *partie* de la toise: néanmoins on peut dire que c'en sont *des parties*, parce que cette quantité contient cinq demi-pieds: or un demi-pied est partie de la toise, parce qu'étant pris douze fois il la mesure; ainsi ce pas contient des parties de la toise, puisqu'il contient cinq demi-pieds, qui sont $\frac{5}{12}$ c'est-à-dire, cinq douziémes parties d'une toise.

4. Lorsque deux quantitez sont telles, qu'on peut trouver une troisiéme quantité qui soit partie de l'une & de l'autre, c'est-à dire, qui mesure l'une & l'autre, alors ces deux quantitez sont *commensurables*; ainsi cette quantité d'un pas d'une part, & une toise de l'autre, sont deux quantitez commensurables, parce que l'on peut donner une troisiéme quantité, sçavoir un demi pied, laquelle mesurera la toise & ce pas: car le demi-pied pris cinq fois égale ce pas, & ce même demi-pied pris douze fois égale la toise.

5. Mais s'il n'est pas possible de trouver une troisiéme quantité qui mesure l'une & l'autre, alors ces deux quantitez sont *incommensurables*.

6. Les

6. Les grandeurs commenſurables ſont *comme nombre à nombre*, c'eſt-à-dire, qu'on peut exprimer ces grandeurs par de certains nombres, en ſorte que comme une grandeur eſt à l'autre grandeur, ainſi un certain nombre ſoit à un autre certain nombre. Par exemple, ſi une ligne eſt d'une toiſe ou de ſix pieds, & une autre ligne d'un pas de deux pieds & demi, ces deux lignes ſeront comme nombre à nombre: car puiſque le demi-pied meſure l'une & l'autre, l'une par cinq, & l'autre par douze, il eſt clair que l'une contenant cinq demi-pieds, & l'autre en contenant douze, ces deux lignes ſeront comme cinq à douze, & par conſequent comme nombre à nombre.

7. Si deux grandeurs ne ſont point comme nombre à nombre, c'eſt-à-dire, s'il n'eſt pas poſſible d'exprimer leurs grandeurs par deux nombres, elles ſeront incommenſurables: cela paroît par la précedente.

8. Il faut donc voir maintenant s'il y a en effet des grandeurs qui ſoient telles qu'on ne puiſſe point les exprimer par des nombres: car ſi cela eſt, il faudra dire qu'il y a des grandeurs incommenſurables.

9. *Un nombre plan* eſt celui qui peut provenir de la multiplication de deux nombres.

nombres. Par exemple, six est nombre plan, parce qu'il provient de la multiplication de trois & de deux : car deux fois trois font six. De même, quinze est un nombre plan, parce qu'il provient de cinq multiplié par trois. De même, neuf est un nombre plan, parce qu'il provient de trois par trois.

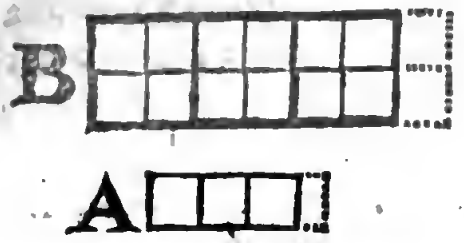
10. Les nombres, qui étant ainsi multipliez l'un par l'autre, produisent un plan, s'appellent *côtez* de ce plan, comme 2. & 3. sont les côtez de 6. de même 3. & 5. sont les côtez de 15.

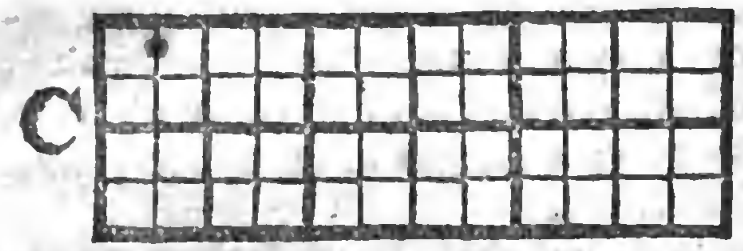
11. Si l'on imagine les unitez comme de petits quarrez, ces quarrez se pourront ranger en rectangle, quand leur nombre sera plan. Par exemple, 12. quarrez se rangent en un rectangle, dont un côté sera six, & un autre côté sera deux; & de même 48. sera un rectangle, dont un côté est 12. & l'autre 4. Voyez les figures suivantes B & C.

12. *Nombre quarré* est un plan, dont les côtez sont égaux, comme 4. provenant de deux multiplié par deux, comme 9. provenant de trois par trois, comme 16. provenant de 4. par 4. *&c.*

13. Un nombre quarré se peut ranger en quarré; & le nombre qui se peut ranger en quarré, est quarré, & celui qui ne sçauroit se ranger en quarré, n'est pas nombre quarré.

14. Nombres *Plans ſemblables* ſont ceux qui peuvent ſe ranger en rectangles ſemblables, c'eſt-à-dire, en des rectangles dont les





côtez ſont proportionnels, comme 12. & 48. car les côtez de 12. ſont 6. & 2. comme l'on voit dans la figure B. & les côtez de 48. ſont 12. & 4. comme l'on voit dans la figure C. or 6. 2 :: 12. 4.

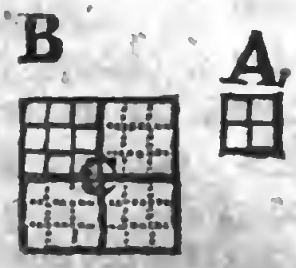
15. Tous les nombres quarrez ſont plans ſemblables. (6. 12.)

16. Tout nombre peut ſe ranger en ligne droite, & en cet état il peut paſſer pour plan: de ſorte que 3. dans la figure A, ſera un plan ſemblable à 12. car les côtez du plan de trois ſont 3. & 1. parce qu'une fois trois c'eſt trois, & les côtez de 12. ſont 6. & 2. or 3. 1 :: 6. 2.

17. Il y a des nombres qui ne ſont pas plans ſemblables, comme depuis 1. juſqu'à 10. il y a 1. 4. 9. qui ſont ſemblables étant quarrez; puis il y a 2. 8. qui

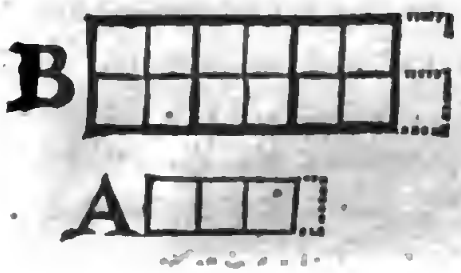
qui ont un côté double de l'autre: les autres ne le ſont pas, comme 2. 3. 4. 5. 6. 7.

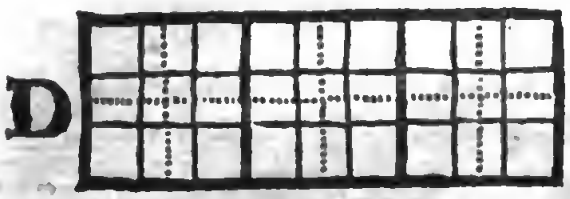
18. Si un nombre quarré multiplie un autre nombre quarré, il produira un troiſiéme quarré. A. 4. & B. 9. étant nombres quarrez, ſe multiplient, & produiſent un nombre C; ſçavoir 36. Je dis que ce troiſiéme nombre eſt un nombre quarré: car multiplier B par A, c'eſt prendre B autant de fois qu'il y a d'unitez dans A. Or je puis conſiderer tout le nombre B. 9. comme un quarré unique, & puis le prendre autant de fois qu'il y a d'unitez ou de petits quarrez en A: & comme ces unitez d'A ſont rangées en quarré; auſſi je pourrai ranger en quarré tout autant de quarrez B comme autant d'unitez; de ſorte qu'ici il y aura 4. B. qui feront le quarré total C. 36.



19. Si deux nombres plans ſont ſemblables, le grand ſe peut partager en autant de quarrez qu'il y aura d'unitez dans le petit. A 3. & B 12. ſont plans ſemblables: en ſorte que le côté 3. eſt au côté 6. comme le côté 1. eſt au côté 2. Je puis partager ce plan B. 12. en trois quarrez rangez de même que les trois petits quarrez du plan A, & chacun de

ces grands quarrez de B en vaudra 4. de ceux d'A. De même, ſi les plans ſont 8. & 72. je puis diviſer 72. en 8. quarrez, dont chacun en comprendra 9. de ceux du petit plan 8. La même choſe arrivera encore, bien qu'un de ces nombres, ou même tous deux ſoient rompus, comme ſi A contient 3. & demi, & B 14. je puis partager 14. en trois quarrez & demi, diſpoſez comme ceux d'A, comme l'on voit par les petits quarrez ponctuez, qui ont été ajoûtez à ces figures.



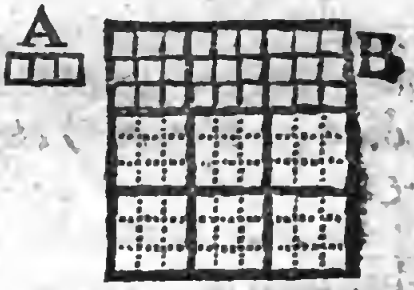


De même, ſi les plans ſont B 12. & D 27. je puis partager 27. non ſeulement en trois quarrez rangez comme ceux d'A, mais auſſi en 12. rangez comme ceux de B; ce que l'on voit ici par les lignes ponctuées. Pour cela il ne faut que partager les côtez du grand plan en autant de parties que ſont partagez les côtez homologues du petit plan. Les figures feront aiſément comprendre tout ceci.

20. Les nombres plans qui ſe peuvent ainſi

ainſi partager, en ſorte qu'il y ait autant de quarrez dans le grand plan, que d'unitez dans le petit, ſont ſemblables : c'eſt la converſe de la précedente.

21. Deux nombres plans ſemblables multipliez l'un par l'autre produiſent un nombre quarré. Car ayant partagé le grand plan en autant de quarrez qu'il y a d'unitez dans l'autre plan, (7. 19.) on multipliera un plan par l'autre, en prenant les grands quarrez du grand plan autant de fois qu'il y a d'unitez ou de petits quarrez dans le petit plan, c'eſt-à-dire, autant de fois qu'*ils* ſont eux-mêmes. Or multiplier un nombre de quarrez par ce même nombre, c'eſt faire un quarré de ces quarrez. Par exemple A 3. & B 27. étant plans ſemblables, je conſidere

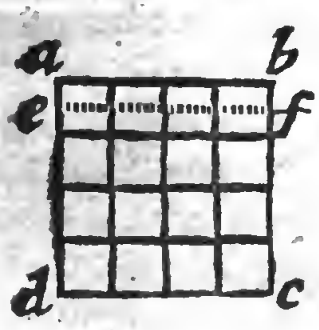


B 27. comme un plan compoſé de trois grands quarrez, comme A 3. eſt un plan compoſé de trois unitez, ou de 3. petits quarrez. Ainſi ſi je prens ces trois grands quarrez autant de fois qu'il y a d'unitez en A, c'eſt-à-dire, trois fois, je ferai trois fois trois de ces grands quarrez de B, c'eſt-à-dire, 9. quarrez, dont chacun en vaudra 9. de ceux qui ſont dans A, & tous

ces 9. quarrez de B en vaudront 81. de ceux d'A ; de ſorte qu'A 3. multipliant B. 27. produit 81. qui eſt un nombre de petits quarrez rangez en quarré, & par conſequent (7. 13.) ce nombre 81. eſt quarré: De même, ſi les plans ſont 12. & D. 27. je partage 27. en 12. quarrez, que je multiplie par 12. & il provient 144. grands quarrez rangez en quarré, qui en vaudront 324. de ceux du petit plan.

22. Si deux nombres plans ſont ſemblables, de quelque façon que l'on range l'un, on pourra ranger l'autre de même. Soient 3. & 12. plans ſemblables comme deſſus. Qu'on range 12. en ligne droite pour faire un rectangle, dont un côté ſoit 12. & l'autre 1. je dis qu'on pourra ranger 3. en un rectangle ſemblable, qui aura pour un côté 6. & pour l'autre, la moitié d'un, *&c.*

23. Si un nombre diviſe un autre nombre quarré, il produira un troiſiéme nombre, qui ſera plan ſemblable au diviſeur.



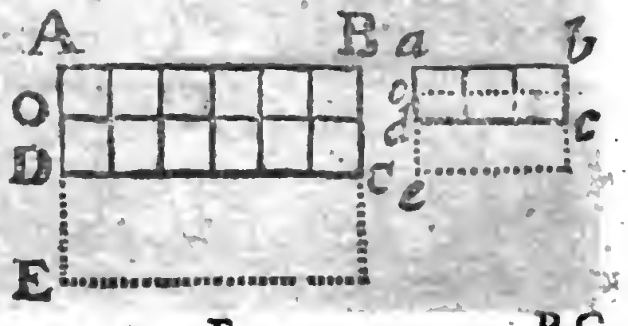
Soit le quarré *ac* 16. & qu'on le diviſe par quelque nombre que ce ſoit, par exemple, par 8. ce qui ſe fait en prenant la huitiéme partie du côté *ad*, ſçavoir *ae*, & tirant la parallele *ef* ; car on aura le plan *af*, qui

qui ſera la huitiéme partie du quarré *a c*. Or diviſer un nombre ou un plan par 8. c'eſt prendre la huitiéme partie de ce nombre ou de ce plan. Je dis que *a f* eſt un plan ſemblable à 8. Car 8. étant rangé en ligne droite pour faire un rectangle, dont un côté ſoit 8. & l'autre 1. le rectangle *a f* lui ſera ſemblable, puiſque *a e* a été pris la huitiéme partie de *a d* ou de *a b*: Donc comme 8. à 1. (qui ſont les côtez du plan 8. diviſeur) ainſi *a b* à *a e*: (qui ſont les côtez du plan provenant du quarré *a c* diviſé par 8.) donc, *&c.* ce qu'il falloit prouver.

24. Si deux plans ſe multipliant produiſent un quarré, ils ſont ſemblables.

25. Deux nombres plans non-ſemblables ſe multipliant, ne ſçauroient produire un nombre quarré. Ces propoſitions ſont des ſuites des précedentes.

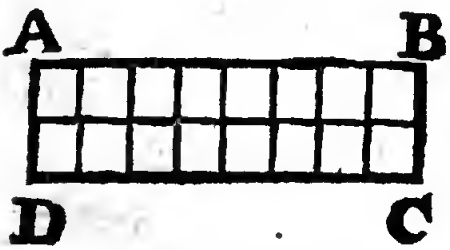
26. Si deux nombres ſont plans ſemblables, leurs équimultiples quelconques, & leurs parties-pareilles quelconques, ſont auſſi plans ſemblables. Soient les plans *a b c d* 3. & A B C D 12. ſemblables, en ſorte qu' *a b*. A B :: *b c*.



BC. Je dis que ſi l'on prend le double de l'un & le double de l'autre, (ou tel autre équimultiple qu'on voudra) ces doubles ſeront ſemblables: car ayant pris *a e* double d'*a d*, & A E double d'A D, pour avoir le plan *b e* double du plan *b d*, & le plan B E double du plan B D, il eſt clair que *a d*. A D :: *a e*. A E. Or *a d*. A D :: *a b*. A B. donc auſſi *a e*. A E :: *a b*. A B; & par conſequent les plans *b e*. & B E ſont ſemblables. De même en ſera-t-il, ſi l'on prend leurs moitiez *b o*, B O, ou telles autres parties pareilles que l'on voudra.

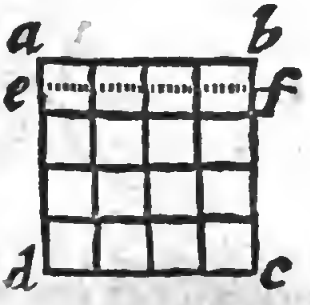
27. Si deux nombres ſont plans non-ſemblables, leurs équimultiples quelconques, & leurs parties-pareilles quelconques ſeront auſſi non-ſemblables. Ceci ſuit de la précedente.

28. Entre deux nombres plans ſemblables quelconques, il tombe un nombre moyen proportionnel. Soient les nombres plans ſemblables 2. & 8. je dis qu'il eſt poſſible de trouver un troiſiéme nombre qui ſera moyen proportionnel: car ſi l'on imagine le plan 8. rangé en ligne droite A B, & le plan 2. rangé auſſi en ligne droite A D, & que de ces deux lignes on en faſſe le plan



A

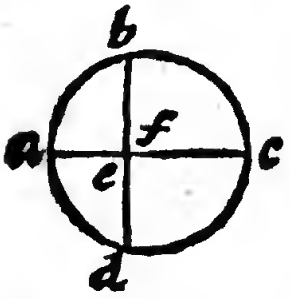
A C 16. ce plan A C 16. proviendra de la multiplication des deux nombres 2 & 8. (6. 17. & ſuivans) & par conſequent le nombre des petits quarrez de tout ce plan A C 16. ſera un nombre quarré, (7. 21.) & ſe pourra ranger en quarré, (7. 13.) Qu'il ſoit donc rangé dans le quarré *a c*; ainſi le quarré *a c* ſera égal au plan A C, puiſque ce n'eſt qu'un même nombre rangé autrement. Donc (6. 59.) le côté *a b* 4. ſera moyen proportionnel entre A D 2. & A B 8.



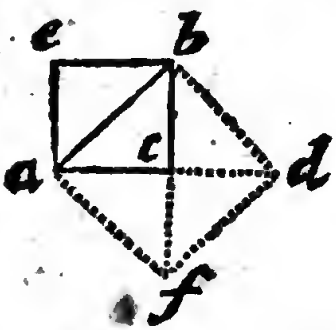
29. Entre deux nombres non-ſemblables, il ne ſçauroit tomber un nombre moyen proportionnel. Soient les nombres 4. & 6. rangez chacun en droite ligne, & que ſe multipliant ils produiſent le plan 24. ce plan 24. n'eſt point un nombre quarré; (7. 25.) & par conſequent il ne ſçauroit ſe ranger en nombre quarré. Donc il ne ſçauroit y avoir de nombre moyen entre 4. & 6. car ce nombre prétendu moyen multiplié par ſoi-même, produiroit un nombre quarré, & d'ailleurs égal au plan fait de 4. & de 6. (6. 59.) ce qui eſt impoſſible, puiſque ce plan 24. fait de 4. & de 6. n'eſt point nombre quarré.

30. Soient deux lignes *a e* & *e c*, comme un nombre à un autre nombre non-

ſemblable: par exemple, comme 1. à 2. Soit de plus *eb* moyenne proportionnelle, en ſorte que *ae. eb*:: *eb. ec*: je dis que *eb* eſt incommenſurable aux deux extrêmes *ae* & *ec*: car *ae* & *ec* étant comme 1. & 2. c'eſt à-dire, comme nombres non-ſemblables, (par l'hypotheſe) auſſi bien que leurs équimultiples quelconques, (7. 27.) il ne ſera jamais poſſible de trouver un nombre moyen proportionnel entre *ae* & *ec* (par la précedente) & par conſequent *eb* ne ſera pas à *ae* ou à *ec* comme nombre à nombre: Donc elle eſt incommenſurable.



31. Le Diametre d'un quarré *ab* eſt incommenſurable au côté *ac*. Car prenant *ad* double d'*ac*, & faiſant le triangle *abd* qui ſera ſemblable à *abc*, à cauſe que *cd* étant égal à *cb*, l'angle *cdb* eſt égal à l'angle *cbd*; (2. 15.) ainſi l'angle *cdb* eſt la moitié d'un droit, auſſi-bien que *cab*: donc *abd* eſt droit, &c. Ainſi *ac. ab*:: *ab. ad*. Donc *ab* eſt moyenne proportionnelle entre *ac* 1. & *ad*. 2. & par conſequent (par la précedente) incommenſurable.



32. On

32. On appelle *Puiſſance* d'une ligne le quarré que l'on fait ſur cette ligne. La puiſſance de *a c* eſt le quarré *a c b e*, & la puiſſance de la ligne *a b* eſt le quarré *a b d f*. Et l'on dit que la ligne *a b peut deux fois la ligne a c*, (*bis poteſt lineam* a c) qui eſt une façon de parler priſe du Grec & receuë en Geométrie.

33. Le diametre *a b* eſt commenſurable *en puiſſance* au côté *a c*, c'eſt-à-dire que le quarré *a b d f* eſt commenſurable au quarré *a c b e*, l'un étant double de l'autre.

34. Mais ſi l'on prend *a o* moyenne proportionnelle entre *a b* & *a c*, cette moyenne *a o* ſera incommenſurable en puiſſance, c'eſt-à-dire, que le quarré d'*a o* ſera incommenſurable au quarré d'*a c*, ou au quarré d'*a b*: car le quarré d'*a c* au quarré d'*a o* eſt en raiſon doublée d'*a c* à *a o*, (6. 29.) c'eſt-à-dire, comme *a c* à *a b*, (6. 30.) Or *a c* eſt incommenſurable à *a b*: (7. 31.) Donc auſſi le quarré d'*a e* eſt incommenſurable au quarré d'*a o*.

35. *Seconde puiſſance* d'une ligne eſt le cube, qui a pour côté cette ligne.

36. Si l'on prend *a n* & *a m*, deux moyennes proportionnelles entre *a c* & *a b*, en ſorte que *a c. a n* :: *a m. a b*. la ligne *a m* ſera incommenſurable en

ſeconde puiſſance à *a c*, c'eſt-à-dire, que ſe cube d'*a c* ſera incommenſurable au cube d'*a n*, parce que le cube d'*a c* eſt au cube d'*a n* en raiſon triplée du côté *a c* au côté *a n*, c'eſt-à-dire, comme *a c* à *a b*. Or *a c* & *a b* ſont incommenſurables, *&c.* Mais auſſi *a c* & *a m* ſont commenſurables en ſeconde puiſſance, car le cube d'*a m* eſt double du cube d'*a c*.

37. Il eſt aiſé d'appliquer aux nombres ſolides ce qui a été dit des nombres plans. On appelle *nombres ſolides* ceux qui proviennent de la multiplication d'un nombre plan par quelque nombre que ce ſoit: Par exemple, 18. eſt nombre ſolide fait de 6. (qui eſt un nombre plan) multiplié par 3. ou de 9. multiplié par 2.

38. Nombres *ſolides ſemblables* ſont ceux dont les petits cubes peuvent ſe ranger, en ſorte qu'ils faſſent des parallelepipedes rectangles ſemblables.

39. Nombres *cubiques* ſont ceux qui ſe peuvent ranger en cubes, comme 8. ou 27. dont les *côtez* ſont 2. & 3. les *baſes* ſont 4. & 9.

40. Tout nombre cubique multipliant un autre nombre cubique, produit un troiſiéme nombre cubique.

41. Entre deux nombres ſolides ſemblables, il tombe deux nombres moyens proportionnels.

On n'a qu'à appliquer aux ſolides ce qui a été démontré à l'egard des plans.

42. Ces démonſtrations par leſquelles on prouve qu'il y a des lignes & des grandeurs incommenſurables, prouvent auſſi que le *Continu* n'eſt pas compoſé de points finis: car ſi le diametre auſſi-bien que le côté d'un quarré étoient compoſez de points finis, le point meſureroit le côté & le diametre: car le point ſe trouveroit un certain nombre de fois dans le côté, & un autre certain nombre de fois dans le diametre; ce qui eſt impoſſible (par les démonſtrations précedentes.)

43. Comme dans un triangle rectangle le quarré du grand côté eſt égal aux deux quarrez faits ſur les deux autres côtez, (6. 61.) on s'eſt toûjours ſervi de ce triangle pour trouver des incommenſurables: car ſi tous les trois côtez ſont commenſurables, ils pourront être tous trois exprimez par trois nombres, & alors le quarré du plus grand nombre ſera égal aux quarrez des deux autres nombres. Comme ſi le grand côté eſt de 5. pieds, le petit de 3. le mediocre de 4; le quarré de 5. ſera 25. & les autres quarrez ſeront 9. & 16. & ces deux enſemble 9. & 16. font le troiſiéme 25. Mais ſi le petit côté eſt 2. & le mediocre 3. le grand côté ne pourra point s'exprimer par nombres, parce

que le quarré du petit côté 4. joint avec le quarré du mediocre 9. fait 13. qui exprime le quarré fait ſur le grand côté : or comme ce nombre 13. n'eſt point nombre quarré, auſſi ne ſçauroit-il avoir de côté ou de racine exprimée par aucun nombre.

44. De tout tems on s'eſt appliqué à rechercher quelque methode pour trouver divers nombres propres à exprimer tous les trois côtez du triangle rectangle, pour être aſſeurez que tous ces trois côtez ſont commenſurables. Voici une methode par laquelle on trouve tous les nombres poſſibles propres à cet effet.

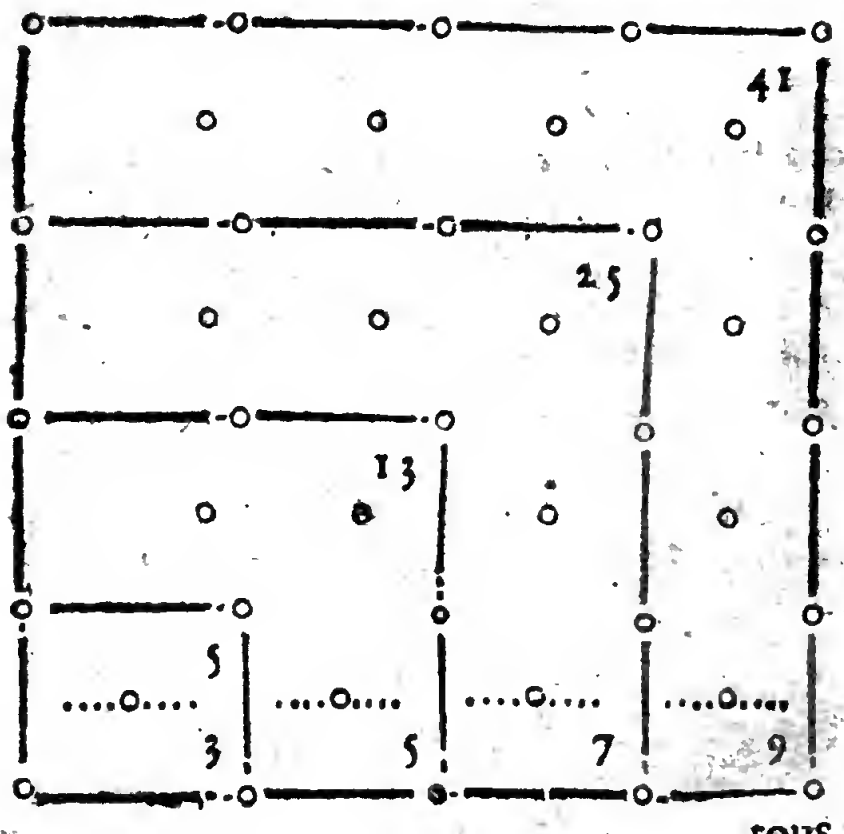
45. Si l'on prend deux nombres quelconques, (même l'unité) qui ne different que de l'unité, & qu'on joigne enſemble les deux quarrez de ces deux nombres; on aura un nombre qui ſera racine d'un quarré égal à deux quarrez, & ce nombre exprimant le grand côté d'un triangle rectangle, le côté médiocre ſera exprimé par un nombre moindre de l'unité; & le petit côté par les deux premiers nombres joints enſemble. Par exemple, ayant pris 1. & 2. & quarré l'un & l'autre, pour avoir 1. & 4 je joins enſemble ces deux quarrez 1. & 4. & je fais 5. je dis que 5. pourra exprimer le grand côté, & 4. le mediocre, & 3. le petit, en ſorte que 25. quarré du grand côté ſera

égal

égal à 16. & à 9. quarrez des deux autres côtez. De même, ſi je prens 2. & 3. & que joignant leurs quarrez 4. & 9. je faſſe 13. je dis que j'aurai 13. & 12. & 5. pour côtez d'un triangle rectangle, en ſorte que 169. quaré de 13. ſera égal à 144. & 25. quarrez de 12. & de 5. De même, prenant 3. & 4. & joignant leurs quarrez 9. & 16. je fais 25. je dis que 25. ſera le grand côté du triangle, 24. le côté mediocre, & 7. le petit.

Tout cela ſe trouve plus facilement en cette ſorte.

46. Si l'on range les unitez en ſautoir,



tous

tous les nombres qui feront une figure quarrée seront des nombres propres à exprimer le grand côté. Le petit côté sera le nombre compris dans les deux premiers rangs de la figure quarrée, & le côté mediocre sera d'une unité moindre que le plus grand.

47. Cette figure continuée donnera tous les nombres possibles : mais il faut remarquer que les équimultiples des trois nombres trouvez auront le même effet ; comme ayant trouvé 5. 4. & 3. leurs doubles 10. 8. & 6. representeront les trois côtez du triangle, en sorte que 100. quarré de 10. est égal à 64. & 36. quarrez de 8. & de 6. & de même leurs triples 15. 12. 9. feront la même chose : mais l'on voit bien que tous ces nombres ayant toûjours les mêmes proportions, n'expriment jamais qu'un même triangle, sçavoir, celui qui est exprimé par 5. 4. & 3. & qu'ainsi tous ces nombres doivent être censez les mêmes.

LIVRE HUITIEME.

Des Progreſſions & des Logarithmes.

1. UNe *Progreſſion* eſt une ſuite de quantitez qui gardent entre elles quelque ſorte de rapport ſemblable, & chacune de ces quantitez s'appelle *Terme*.

2. Lorſque les termes qui ſe ſuivent ainſi les uns après les autres, augmentent ou diminuënt également; la Progreſſion s'appelle *arithmetique*, comme ſont les nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. *&c.* ou bien les nombres impairs 1. 3. 5. 7. 9. 11. *&c.* ou bien encore comme 4. 8. 12. 16. ou comme 20. 15. 10. 5. 0.

3. La Progreſſion arithmetique peut augmenter à l'infini, mais non pas diminuër.

4. Si dans une Progreſſion arithmetique on prend quatre termes, dont les deux premiers ſoient éloignez l'un de l'autre autant que le ſont les deux derniers; ces quatre termes ſont dits proportionnels en proportion arithmetique, comme

me dans la Progreſſion des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8, 9. *&c.* Si nous prenons 2 3 ::: 9. 10. (cette marque ::: nous ſervira de ſigne pour la proportion arithmetique) il y aura même proportion arithmetique entre 2. & 3. qu'entre 9. & 10. c'eſt-à-dire, que 10. ſurpaſſe 9. de tout autant que 3. ſurpaſſe 2. De même 3. 5 :::: 8. 10. ſont en proportion arithmetique. Comme auſſi 1. 5. :::: 5. 9 ou 5. étant répeté deux fois, eſt le moyen arithmetique entre 1. & 9.

5. Dans la proportion arithmetique l'aggregé des deux extrêmes eſt égal à l'aggregé des deux moyens, comme dans 2. 3 :::: 9. 10. l'aggregé de 2. & de 10. eſt 12. & l'aggregé de 3. & de 9. eſt auſſi 12, De même, dans 3. 5 :::: 8. 10. l'aggregé de 3. & de 10. eſt 13. & l'aggregé de 5. & de 8. eſt auſſi 13. Et la raiſon de ceci eſt aſſez claire d'elle-même: car ſi 10. ſurpaſſe 8. auſſi ce qu'on ajoûte à 8. ſçavoir, 5. ſurpaſſe de tout autant ce qu'on ajoûte à 10 ſçavoir 3. ainſi on fait l'égalité.

6. L'aggregé ou la ſomme du premier & du dernier terme eſt égal à la ſomme du 2. & du penultiéme, ou du troiſiéme de l'antepenultiéme, *&c.* comme dans le premier exemple 1. & 9. font 10. & de même 2. & 8. ou bien 3. & 7. ou 4. & 6. font

6. ſont toûjours 10. & il reſte au milieu 5. qui étant pris deux fois (comme équivalent à deux, puiſqu'il eſt également éloigné du premier & du dernier) fait auſſi 10.

7. Si l'on ajoûte le premier au dernier terme, & que l'on multiplie leur ſomme par la moitié du nombre des termes, le produit ſera égal à l'aggregé de tous les termes enſemble, comme ici ajoûtant 1. à 9. pour avoir 10. & multipliant 10. par 4. & $\frac{1}{2}$, (car il y a 9. termes) on fera 45. qui eſt la ſomme de tous les termes depuis 1. juſqu'à 9. Ceci eſt manifeſte par la précedente.

8. Lorſque les termes de la progreſſion ſont continuellement proportionnels; c'eſt-à-dire que le 1. eſt au 2. comme celui-ci eſt au 3. & comme le 4. au 5. *&c.* alors la Progreſſion s'appelle *Geometrique*, comme 1. 2. 4. 8. 16. 32. ou bien 1. 3. 9. 27. 81. ou bien 3. 12. 48. 192. 768. ou bien 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$, *&c.*

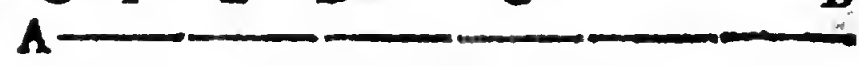
9. La Progreſſion geométrique peut augmenter & diminuer à l'infini.

10. Lorſque la Progreſſion commence par 1. le ſecond terme s'appelle *Racine* ou *Côté*: le 3e. s'appelle *Quarré* ou 2e. degré: le 4e. *Cube* ou 3e. degré: le 5e. *Quarré-*

Quarré-Quarré ou 4e. degré, le 6e. *Surſolide* ou 5e degré ; le 7e. *Quarré-Cube*, *&c.*

11. Si l'on prend quatre termes, dont les deux premiers ſoient autant éloignez l'un de l'autre dans la progreſſion, que le ſont les deux derniers, ils ſeront ſimplement proportionnels, & le produit des extrêmes ſera égal au produit des moyens. (6. 28.)

12. Soit la quantité A B diviſée en C, en D, en E, en F, *&c.* en ſorte que A B. A C : : A C. A D : : A D. A E, *&c.* je dis que B C. C D. D E. E F. *&c.* ſeront en progreſſion géometrique continuellement proportionnels, & même



que A B. A C : : B C. C D : : C D. D E, *&c.* car puiſque A B. A C : : A C. A D, il ſera *dividendo* A B moins A C. (c'eſt-à-dire, C B.) A C : : A C moins A D, (c'eſt-à-dire, D C.) A D. & par conſequent *alternando* C B. D C : : A C. A D. ou : : A B. A C. ainſi de toutes les autres, on prouvera : : D C. E D : : F E : : G F. *&c.*

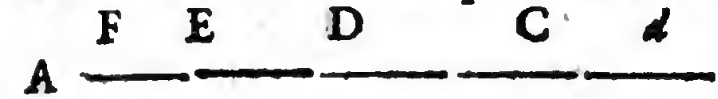
13. Soit une Progreſſion de quantitez en ligne droite B C, C D, D E, E F, *&c.* ſoit priſe C *d* égale au ſecond terme C D, afin d'avoir *d* B, la difference du premier & plus grand terme au ſecond, & que l'on

l'on faſſe comme B *d* à B C : : ainſi B C. à une 4. ligne, ſçavoir, B A. je dis que ſi le nombre des termes B C, C D, D E, *&c.* eſt fini, pour grand que ſoit d'ailleurs ce nombre, tous ces termes pris enſemble, quand il y en auroit cent mille millions, ſeront plus petits que B A. Que ſi l'on

ſuppoſoit que ces termes fuſſent infinis en multitude; alors ces termes tous enſemble ſeroient préciſément égaux à B A: car puiſque par l'hypotheſe *B d* (c'eſt-à-dire B C moins C *d* ou C D) eſt à B C : : comme B C. (c'eſt-à dire A B moins A C) eſt à A B; on trouvera aiſément que comme B C. C D : : A B. A C : : A C. A D. *&c.* & par conſequent tous les termes C D, D E, E F, *&c.* ſe trouveront toûjours par-deçà le point A, duquel on s'approchera toûjours d'autant plus près, qu'on augmentera le nombre des termes; ainſi l'on voit bien que tous ces termes, (qui ſont ce qu'on appelle dans l'Ecole *Parties proportionnelles*) quand ils ſeroient actuellement infinis, ne feront pas une longueur infinie, puiſqu'ils ſont tous renfermez dans B A.

14. Cette démonſtration ſe rend ſenſible dans un exemple d'une progreſſion particuliere, dont les termes ſont en raiſon

ſon double. Par exemple, BC. double de



CD. & CD. double de DE. *&c.*: car ſi le nombre des termes eſt fini, quand il y en auroit cent millions, qu'on prenne le dernier & plus petit terme, par exemple FE, ajoûtons à ce dernier FE une autre quantité qui lui ſoit égale, ſçavoir, FA; il eſt clair que EA ſera égal au penultiéme terme ED: car ce penultiéme ED eſt double du denier FE, par l'hypotheſe: or EA eſt auſſi double de FE, puiſque nous poſons FA égal à EF. De même AE avec DE, c'eſt-à-dire, AD, ſera égal au ſuivant terme CD: & enſuite AC ſera égal à BC. De ſorte que l'on voit par là que le premier & plus grand terme eſt toûjours égal à tous les autres enſemble, pourveu qu'on y ajoûte une quantité égale au dernier & plus petit terme: mais que ſi on n'y ajoûte rien, le premier eſt toûjours plus grand que tous les autres pris enſemble. Si l'on ſuppoſe que ces termes ſoient actuellement infinis, alors le plus grand terme BC ſera préciſément égal à tous les autres infinis pris enſemble, CD, DE, EF, *&c.* Car l'on voit bien que plus on ajoûte de termes, plus auſſi on avance vers A, en retranchant toûjours la moitié de ce qui reſte.

Or

Or retranchant ainſi continuellement d'une quantité la moitié, & de ce qui reſte encore la moitié, & puis encore la moitié de ce qui reſte, il eſt manifeſte que ſi l'on ſuppoſoit qu'on eût retranché actuellement une infinité de fois ainſi la moitié, il ne reſteroit plus rien. Cela ſe peut auſſi démontrer par la reduction à l'impoſſible, en montrant que tous ces termes infinis pris enſemble ne ſont ni plus grands, ni plus petits que B A.

15. Par là on peut reſoudre des difficultez que l'on fait dans les Ecoles contre la diviſibilité du continu, & que ceux qui ne ſçavent pas la Geométrie penſent être inſolubles, mais qui au fond ne ſont que de purs paralogiſmes.

16. Si l'on met deux Progreſſions, l'une geométrique, commençant par 1. & l'autre arithmetique, commençant par *o*, en ſorte que les termes de l'une répondent vis-à-vis des termes de l'autre, les termes de l'arithmetique s'appelleront *Logarithmes*, & *Expoſans*, comme

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256.

17. Ce qui ſe fait par multiplication & par diviſion dans la Progreſſion geométrique, ſe fait par addition & par ſouſtration dans les logarithmes: Comme ſi ayant les trois nombres 2. & 8 :: 64. on

0. 1. 2.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256.

veut chercher le quatriéme nombre proportionnel dans la progreſſion geométrique, il faut multiplier le 8. par 64. (qui ſont les deux termes moyens) car le produit 512. ſera égal (6. 28.) au produit de 2. & de cet autre quatriéme nombre, qui doivent être les extrêmes des 4. proportionnels: ainſi pour trouver ce quatriéme nombre, il faut ſeulement diviſer 512. par 2. & l'on aura 256. ainſi 2. 8 :: 64. 256. de ſorte que 64. & 256. ſeront autant éloignez l'un de l'autre dans l'ordre de la progreſſion que le ſont 2. & 8. (8. 11.) mais ſi au lieu des nombres geométriques 2. 8. :: 64. on avoit pris les logarithmes qui leur répondent, ſçavoir, 1. 3. :: : 6. & qu'on eût voulu trouver le quatriéme logarithme, il auroit fallu ajoûter 3. à 6. pour avoir 9. & ôter 1. de 9. pour avoir 8. qui ſeroit le logarithme qui répond au nombre geométrique 256.

18. De même, ſi l'on prend deux nombres geométriques 4. & 8. ſur leſquels répondent les logarithmes 2. & 3. en multipliant 4. par 8, on aura 32. qui ſera ſous le logarithme 5. lequel provient de l'addition de 2. & de 3.

19. De même prenant 16. & le multipliant par lui-même, on aura 256. qui ſera ſous

ſous le logarithme 8. lequel provient de 4. ajoûté à ſoi-même.

20. Ainſi, ſi l'on veut trouver le nombre geométrique qui ſeroit ſous le logarithme 16. il faudroit prendre 256. qui eſt ſous 8. & le multiplier par ſoi-même, & on auroit 65536.

21. Que ſi encore on veut avoir le nombre geométrique qui devroit répondre au logarithme 23. il faut prendre deux logarithmes, qui joints enſemble faſſent 23. comme 7. & 16. & multiplier les nombres geométriques qui leur répondent l'un par l'autre, ſçavoir, 128. (qui eſt ſous 7.) par 65536. (qui doit être ſous 16.) & le produit 8388608. ſera celui qui doit être ſous le 23. logarithme, c'eſt-à-dire, qui doit être à la vingt-quatriéme place, après le premier nombre 1.

22. D'où l'on voit comment on peut aiſément répondre à la demande qu'on fait ordinairement, à combien reviendroit un cheval qu'on acheteroit à cette condition, que pour le premier clou du fer on donneroit un double, & pour le ſecond clou deux doubles, pour le troiſiéme quatre doubles, pour le quatriéme huit, & ainſi juſqu'au vingt-quatriéme: car le vingt-quatriéme coûteroit 8388608. doubles, c'eſt-à-dire; 69905.

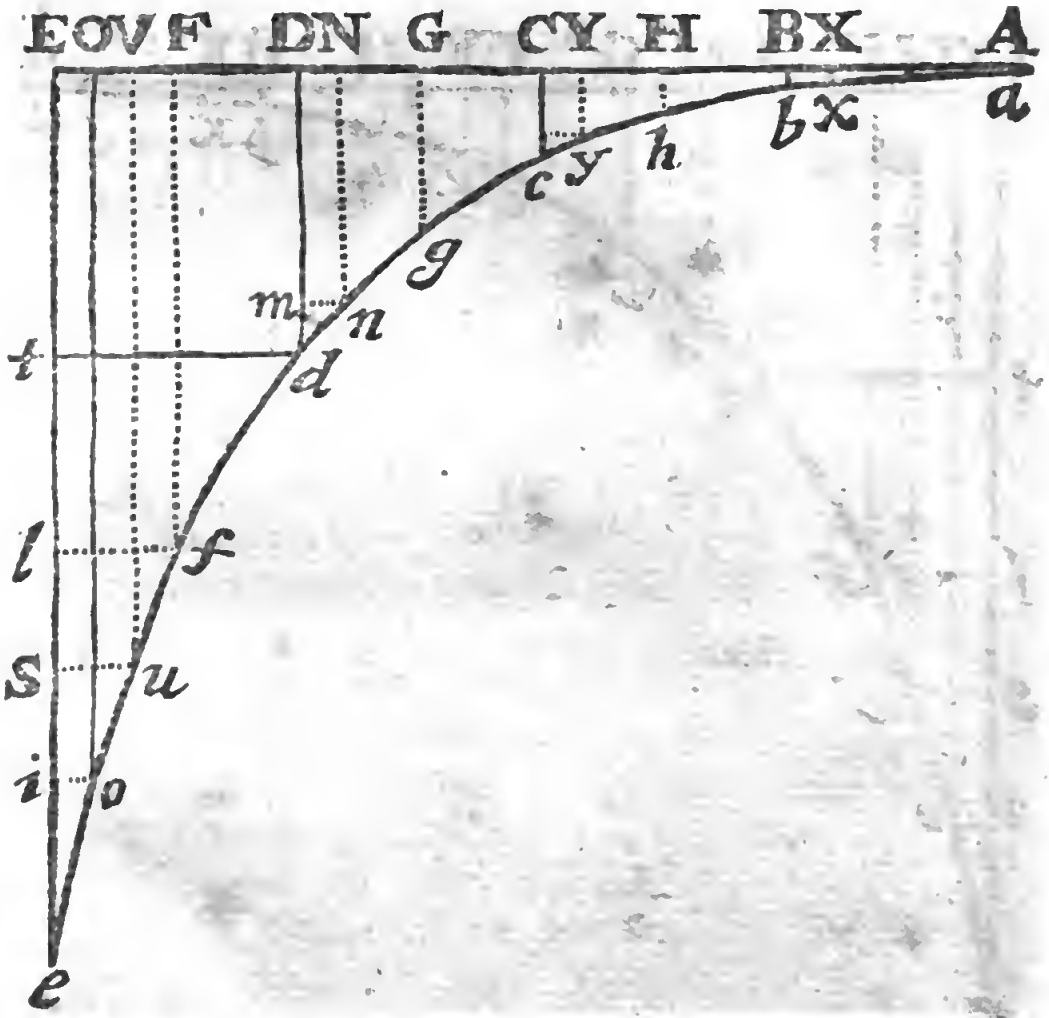
livres 8 doubles, & en doublant cette ſomme (ſuivant 8. 14.) on trouvera que tout le cheval aura coûté 139810. livres.

23. Si l'on avoit dans de grandes tables d'un livre deux longues progreſſions toutes faites, qui ſe répondiſſent ainſi, l'une geométrique, & l'autre arithmetique; on s'épargneroit bien de la peine à calculer, pour trouver les nombres geométriques: car ſi l'on nous donnoit ces trois nombres 32. 64. 128. & qu'on demandât le quatriéme geométrique; au lieu de multiplier 64. par 128. & de diviſer le produit par 32. (ce qui eſt fort ennuyeux dans les grands nombres) il ne faudroit que prendre le logarithme des trois nombres donnez, ſçavoir, 5. 6. 7. ajoûter 6. à 7. & du produit 13. ôter 5. & il reſteroit 8. qui ſeroit le logarithme du quatriéme geométrique: de ſorte que conſultant la table pour voir quel nombre répond à 8. je trouverois 256.

24. Mais parce que dans une progreſſion geométrique, comme celle-ci, tous les nombres ne ſe trouvent pas, on a trouvé le moyen de faire deux progreſſions, dont l'une, qui contient tous les nombres 1. 2. 3. 4. 5. *&c.* & qui ſemble être la Progreſſion arithmetique, a néanmoins les proprietez de la geométrique;

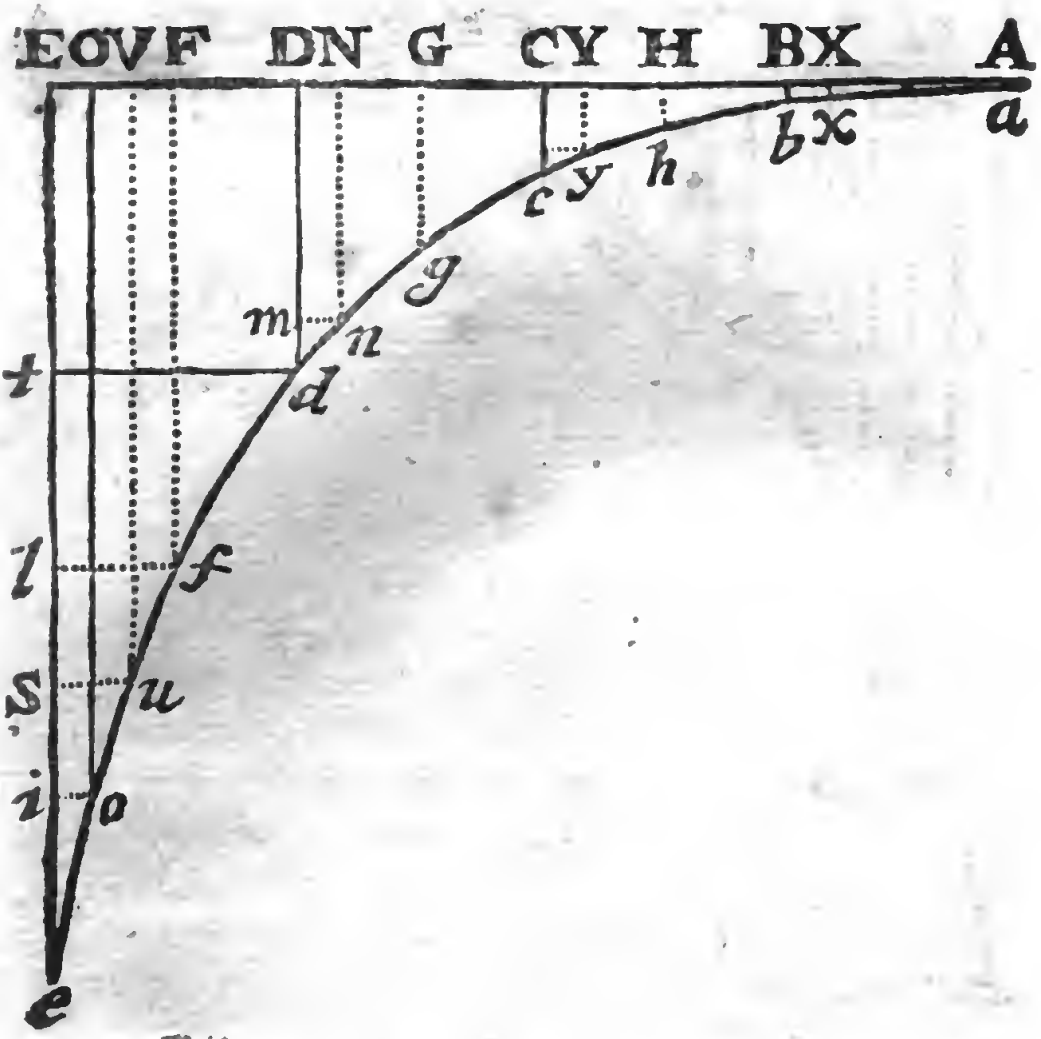
trique ; & l'autre, qui contient des nombres en apparence plus irréguliers, eſt néanmoins la Progreſſion arithmetique. Voici une ligne qui fait comprendre parfaitement tous ces myſteres.

25. Soit la ligne droite A E diviſée



par parties égales A B, B C, C D, D E, *&c.* Par les points A, B, C, *&c.* ſoient imaginées les lignes droites *Aa*, *Bb*,

Cc paralleles entre elles, qui ſoient en Progreſſion geométrique : par exemple qu'*A a* étant 1. *B b* 10. *C c* ſoit 100. *D d* 1000. *E e* 10000. *&c.* nous aurons deux Progreſſions de lignes, l'une arithmetique, & l'autre geométrique: car les



lignes AB, AC, AD, AE, ſeront en Progreſſiou arithmetique, comme 1. 2. 3. 4. & ainſi repreſenteront les logarithmes

rithmes auſquels répondront les lignes geométriques A *a*, B *b*, C *c*, *&c.*

26. Chacune des parties E D, D C, *&c.* ſoit diviſée également en F, G, H, *&c.* & ſoient tirées les paralleles F *f*, G *g*, *&c.* moyennes proportionnelles entre leurs collaterales, c'eſt-à-dire, E *e*. F *f* :: F *f*. D *d* :: D *d*. G *g*, *&c.* Derechef ſoient encore tirées d'autres moyennes proportionnelles par le milieu de chaque partie E F, F D, D G, *&c.* & ainſi de ſuite juſqu'à ce que ces lignes paralleles ſoient fort près les unes des autres, & qu'enfin on imagine une ligne courbe qui paſſe par les extrémitez de toutes ces paralleles *e f d g*, *&c.* on aura une ligne, dont les proprietez ſont trés-conſiderables, & les uſages trés-grands, comme l'on verra en ſon lieu.

27. Si cette figure avoit été formée ſur une fort grande table, & avec toute la juſteſſe requiſe, on pourroit diviſer chaque partie A B, B C, *&c.* non ſeulement en 100. ou en 1000. mais en 10, 000. ou en 100, 000. ou en davantage. De ſorte que A B étant de 100, 000. A C ſeroit de 200, 000. & A D de 300, 000., *&c.* ce qui eſt toûjours en Progreſſion arithmetique.

28. La ligne E *e* étant ſuppoſée de 10,000. parties, imaginons que par chacune de ces parties ſoient tirées des paralleles à la ligne A E, qui coupent la courbe en autant de points. Par exemple, ſoit la ligne *i o* tirée par la partie 9,900. de E *e* qui coupe la courbe au point *o*. Soit encore la parallele *o* O, qui coupe la ligne A E, au point O dans la 399,563. partie, & l'on connoîtra par là que 399,563. eſt le logarithme de 9,900. De même, ſi S *u* paſſoit par la partie 9,000. de la ligne E *e*, & que *u* V coupât la ligne A E dans la 395,424. ce nombre-cy ſeroit le logarithme de 9,000. *&c.*

29. Ainſi l'on pourroit faire une table de logarithmes depuis 1. juſqu'à 10,000. & même encore plus avant, ſi l'on vouloit allonger la ligne A E.

30. Remarquez qu'il ſuffit, pour avoir tous ces logarithmes depuis 1. juſqu'à 10,000. de trouver les logarithmes depuis 1,000. juſqu'à 10,000. c'eſt-à-dire, (après avoir tiré la parallele *d t*) en prenant les logarithmes de toutes les parties depuis *t* juſqu'à *e*, dont les logarithmes ſont terminez entre E & D: car avec cela on aura les logarithmes de toutes les autres parties qui ſont depuis *t* juſqu'à E, & dont les

les logarithmes ſont entre D & A. Par exemple, O *o* étant de 9,900. parties, & ſon logarithme 399,563. ce même nombre ſervira auſſi de logarithme pour *n* N 990. & pour *y* Y 99. en changeant ſeulement le premier chifre 3. parce que, ſuivant la compoſition de cette ligne, O N, ou N Y, doivent être égales à E D ou D C; ce que chacun pourra aiſément démontrer. Ainſi O N, ou N Y contiendront 100,000. & puiſque A O eſt 399,563. ôtant O N 100,000. il reſtera 299,563. pour A N, duquel ôtant encore 100,000. il reſtera 199,563. pour A Y, & de même façon ayant A V 395,424. pour logarithmes de V *u* 9,000. on aura auſſi 095,424. pour logarithmes de X *x* 9. ou 195,424. pour logarithmes de 90. ou 295,424. pour logarithmes de 900.

31. Tout ceci ſe peut auſſi réduire en pratique par le calcul, ſans faire en effet ces figures, mais ſeulement en ſe les imaginant toutes faites : car par l'arithmetique on peut trouver un nombre moyen proportionnel F *f* entre les deux D *d* & E *e*, & après cela encore des moyens entre D *d* & F *f*, ou entre F *f* & E *e*, *&c.* Mais ce que nous venons d'expliquer eſt ſuffiſant, pour donner

toute la connoiſſance que nous devons avoir de la nature & de l'artifice des logarithmes: car on ne doit pas ſe mettre en peine de les calculer en effet, & de les trouver, puiſque tout cela eſt déja tout fait; Dieu, pour le bien public, ayant ſuſcité des perſonnes, à qui il a donné aſſez de patience, pour ſurmonter l'ennui d'un travail qui devroit paroître inſupportable: car nous ſçavons que plus de 20. perſonnes gagées pour cela ont paſſé plus de 20. ans à calculer avec une aſſiduité infatigable.

32. Outre ces deux Progreſſions, il y en a une troiſiéme, qu'on appelle *Harmonique*, lorſqu'en prenant trois termes qui ſe ſuivent immediatement, on trouve que le plus grand eſt au plus petit, comme la difference du plus grand & du moyen eſt à la difference du moyen & du plus petit, comme 30. 20. 15. 12. *&c.* ſont en Progreſſion harmonique; car en prenant 30. 20. 15. la difference de 30. & de 20. eſt 10. la difference de 20. & 15. eſt 5. or 10. 5 :: 30. 15.

33. Cette Progreſſion peut diminuër à l'infini, mais non pas augmenter.

Tout ce que l'on a dit juſqu'à preſent de cette Progreſſion, n'eſt pas de grand uſage, & je ne veux pas m'engager à dire ici des choſes extraordinaires.

On

On verra dans la ſuite de cette Geométrie quelques propriétez aſſez conſiderables de cette Progreſſion, qui pourront donner quelque éclairciſſement, pour entendre ce que nous avons de la Muſique des Anciens, dont l'obſcurité n'a pas encore été penetrée. On y démontrera le rapport que l'Hyperbole a avec cette Progreſſion; car comme l'angle rectiligne ſert pour trouver entre deux données tant de moyennes que l'on voudra en raiſon arithmetique; & que cette ligne courbe que nous venons de décrire pour les logarithmes, ſert pour trouver auſſi entre deux données autant de moyennes que l'on voudra en raiſon geométrique; de même l'on fera voir que l'Hyperbole ſert pour trouver entre deux données autant de moyennes que l'on voudra en raiſon harmonique.

34. Il y a encore la Progreſſion des quarrez, & celle des cubes, des quarre-quarrez, ſurſolides, quarrecubes, *&c.* comme 1. 4. 9. 16. 25. 36. *&c.* qui ſont tous le quarrez, dont les racines ſont les nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6. *&c.* De même, 1. 8. 27. 64. 125. 216. qui ſont les cubes des mêmes nombres. De même, 1. 16. 81. 256. 625. 1296. qui ſont les quarre-quarrez des mêmes nombres, *&c.*

33. Dans la Progreſſion des quarrez mettant 0 pour premier terme, ainſi 0. 1. 4. 9. 16. *&c.* la ſomme de tous les

termes eſt plus grande que le tiers du dernier terme multiplié par le nombre des termes ; & cet excès qui eſt au deſſus du tiers, eſt toûjours d'autant plus petit, que le nombre des termes eſt plus grand. De même, dans la Progreſſion des cubes, cette ſomme des termes eſt plus grande que le quart ; & dans les quarrequarrez, elle eſt plus grande que la cinquiéme partie, & ainſi conſecutivement des autres. Pour prouver ceci, il ſuffit d'en faire une induction, comme l'on voit dans cette table, où le ſecond

1	0	0	0	
2	1	1	2	$\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
3	4	5	12	$\frac{5}{12}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$
4	9	14	36	$\frac{7}{18}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$
5	16	30	80	$\frac{9}{24}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{24}$
6	25	55	150	$\frac{11}{30}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{30}$
7	36	91	252	$\frac{13}{36}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{36}$

rang

rang contient la Progreſſion de quarrez depuis o. Le troiſiéme rang contient les ſommes des termes. Par exemple, l'on y voit que la ſomme depuis o. juſqu'à 9. eſt 14. Le quatriéme rang contient le produit de chaque terme multiplié par le nombre des termes qui ſont depuis o juſqu'à lui ; lequel nombre eſt marqué dans le premier rang, comme 36. eſt le produit de 9. multiplié par 4. Le cinquiéme rang contient des fractions, qui marquent la proportion des nombres du troiſiéme & du quatriéme rang, comme vis-à-vis de 14. & de 36. on trouve $\frac{7}{18}$; ce qui veut dire que 14. eſt à 36. comme 7. à 18. & qu'ainſi la ſomme des termes 14. eſt au produit de 9. multiplié par 4. ſçavoir, à 36. comme 7. à 18. Davantage, dans ce même cinquiéme rang, après $\frac{7}{18}$ on voit encore ces caracteres ; (ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$) ce qui veut dire que $\frac{7}{18}$ valent autant qu'un tiers, & de plus une dix-huitiéme partie, parce qu'en effet $\frac{7}{18}$ valent autant que $\frac{6}{18}$ plus $\frac{1}{18}$, c'eſt-à-dire que

1	0	0	0	
2	1	1	2	$\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
3	4	5	12	$\frac{5}{12}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$
4	9	14	36	$\frac{7}{18}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$
5	16	30	80	$\frac{9}{24}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{24}$
6	25	55	150	$\frac{11}{30}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{30}$
7	36	91	252	$\frac{13}{36}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{36}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$ de ſorte que la ſomme 14. eſt le tiers du produit 36. & outre cela encore il contient de plus une dix-huitiéme partie de 36. De même, on trouve que 30. qui eſt la ſomme des termes juſqu'à 16. eſt plus du tiers de 80. qui eſt le produit de 16. par 5. & que l'excés eſt $\frac{1}{24}$: Car $\frac{30}{80}$ valent autant que $\frac{3}{8}$ ou que $\frac{9}{24}$ ou que $\frac{8}{24} + \frac{1}{24}$. ou enfin que $\frac{1}{3} + \frac{1}{24}$ Or $\frac{1}{24}$ n'eſt pas tant que $\frac{1}{18}$; ainſi l'on

l'on voit dans la ſuite de cette table que ces excés qui ſont au deſſus du tiers, vont toûjours en diminuant, à meſure que le nombre des termes croît: car ces excés ſont $\frac{1}{24}\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{36}\ \frac{1}{42}\ \frac{1}{48}$, &c. le dénominateur de la fraction augmentant toûjours de ſix.

36. Si l'on fait une table ſemblable pour les cubes, on trouvera que les fractions qui ſeront au deſſus du quart diminueront toûjours en valeur, leur dénominateur augmentant de 4. à chaque nouveau terme qu'on ajoûtera à la Progreſſion; & de même, à l'égard des autres Progreſſions, on trouvera, par de ſemblables tables, ce qui a été dit généralement dans la propoſition précedente.

Tout ceci ſera trés-utile dans la ſuite de cette Geométrie, où l'on traitera encore de pluſieurs autres Progreſſions.

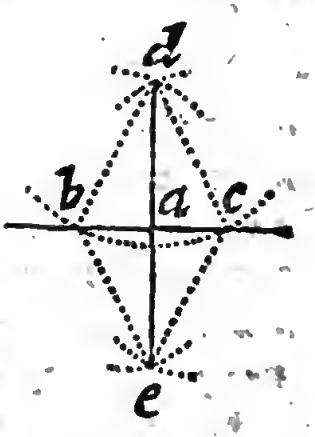
LIVRE DERNIER.

Problemes, ou la Geométrie Pratique.

1. ON appelle *Probleme* en Geometrie, une propoſition qui enſeigne à faire quelque choſe, & qui en démontre la pratique, au lieu que les *Theoremes* ſont des propoſitions ſpeculatives, dans leſquelles on conſidere les proprietez des choſes toutes faites.

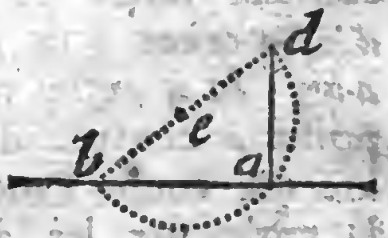
2. *D'un point donné* a *dans la ligne* b a c ; *tirer une perpendiculaire.* Prenez avec le compas deux parties égales de part & d'autre *a c* & *a b* : il n'importe point que ces parties ſoient grandes ou petites, pourveû qu'elles ſoient égales. Ouvrez le compas un peu davantage ; & des points *b* & *c*, comme des centres, tirez l'un après l'autre, deux petits arcs ſemblables, qui ſe croiſent au point *d*. Puis appli-

appliquant la regle ſur les points *a* & *d*, tirez la ligne *a d*, & ce ſera la perpendiculaire requiſe. (2. 16.)



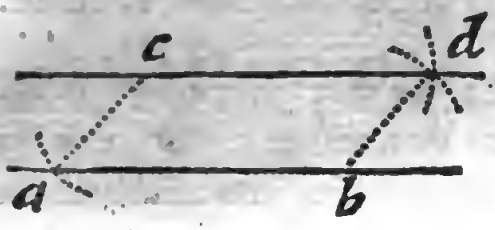
3. *D'un point donné d tirer une perpendiculaire vers la ligne* b a c. Du centre *d* faites un arc de cercle, qui coupe la ligne en deux endroits *b* & *c*: puis de ces deux points *b* & *c* tirez avec la même ouverture du compas, deux petits arcs qui ſe croiſent en *e*, la ligne *d e* ſera la perpendiculaire requiſe. (2. 16.)

4. Lorſque les points donnez *a* ou *d* ſont vers les extrémitez du papier ou de la ſurface où l'on doit faire la figure, & qu'on ne peut pas prendre une diſtance raiſonnable au de-là du point *a*, ſuivant les pratiques précedentes; alors il faut faire ainſi. Quand le point *a* eſt donné dans la ligne, prenez tel point que vous voudrez vers *e*, & de là comme du centre tirez un cercle qui paſſe par *a*, & qui coupe la ligne en *b*: puis de *b* tirez la ligne *b e*, qui, étant continuée, aille couper le cercle



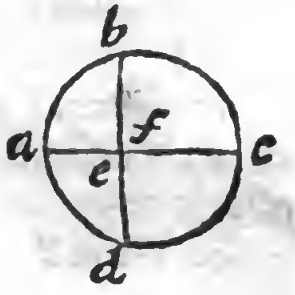
cercle en *d* ; la ligne *d a* ſera perpendiculaire ſur *b a*. (4. 14.) Que ſi le point *d* eſt donné hors la ligne, & non pas le point *a*, tirez une ligne telle que vous voudrez *d b*, & du milieu de cette ligne *c* faites un cercle *b a d*, qui coupe *b a* en *a*; la ligne *d a* ſera la perpendiculaire requiſe. (4. 14.)

5. *D'un point donné tirer une parallele à une ligne donnée.* Soit la ligne donnée *a b*, & le point *c*, par lequel il faut tirer une parallele : du point *c* comme d'un centre, faites un arc de cercle, qui coupe la ligne donnée en *a* : dans la même ligne donnée, prenez un point *b* tel que vous voudrez, le plus éloigné néanmoins qu'il ſe pourra du point *a*, & de ce point *b* à la même ouverture de compas faites un autre arc de cercle *d* : prenez avec le compas la diſtance *a b* ; & à cette même ouverture, du point *c* comme du centre, faites un arc qui coupe l'autre en *d*, appliquant la regle ſur les deux points *c* & *d*, vous aurez la ligne *c d* parallele à *a b* : car le quadrilatere *c a b d*, a les côtez oppoſez égaux par l'operation, & par con-



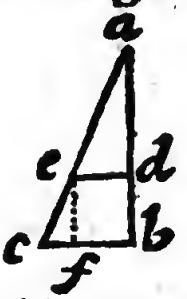
conſequent il eſt parallelogramme, par la converſe de la 9. propoſition du livre 3.

6. *Entre deux lignes données* a c *&* e c, *trouver la moyenne proportionnelle.* Aprés avoir mis les deux lignes l'une aprés l'autre en ligne droite, pour en faire la ligne totale *a c*, prenez en le milieu *f*, & de ce point *f* décrivez le cercle *a b c*: levez la perpendiculaire *e b* qui coupe la circonference du cercle au point *b*, la ligne *e b* ſera moyenne, en ſorte que *a e. e b* : : *e b. e c.* (6. 66.)



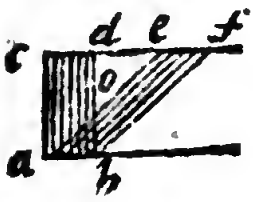
7. *Faire un quarré égal à un rectangle donné.* Prenez la moyenne entre les côtez du rectangle, & le quarré ſur cette moyenne ſera le requis. (6. 59.)

8. *Trois lignes étant données, trouver la quatriéme proportionnelle.* Soient les lignes données *a d, d e, a b*, aprés avoir mis *a d* & *a b* l'une ſur l'autre, & *d e* de travers, pour faire un triangle *a d e*, continuez le côté *a e* vers *c*, & du point *b* tirez la paralle le *b c*, je dis que *b c* ſera la quatriéme proportionnelle requiſe, & que *a d, d e* : : *a b. b c.* (6. 43.)

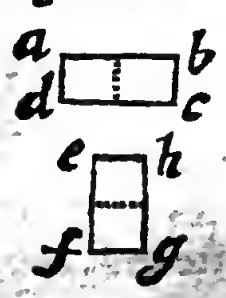


9. *Faire*

9. *Faire un parallelogramme rectangle égal à un triangle donné* a e b. Par le ſommet *e* tirez *e c* parallele à la baſe *a b*, le rectangle *a b d c* ſera double du triangle *a e b*: (3. 18.) ainſi en partageant la baſe *a b* en deux également, & élevant une perpendiculaire, on fera un rectangle égal au triangle.



10. *Un rectangle étant donné, faire un autre rectangle qui lui ſoit égal, & qui ait la longueur donnée.* Soit le rectangle donné *a b c*, & qu'il en faille faire un autre égal, qui ait pour côté la longueur *e f*. Ici nous avons trois lignes données, ſçavoir *a b*, *b c*, (qui ſont les côtez du rectangle donné) & *e f* qui doit être un côté de l'autre rectangle que l'on veut faire. On doit chercher maintenant une quatriéme ligne, pour être le deuxiéme côté de ce rectangle. Ayant ces trois lignes données, trouvez-en la quatriéme proportionnelle (9. 8.) qui ſoit *e h*, en ſorte que *e f*. *a b* : : *b c*. *e h*: je dis que le rectangle *f e h* ſera le requis égal au rectangle *a b c* (6. 27.)

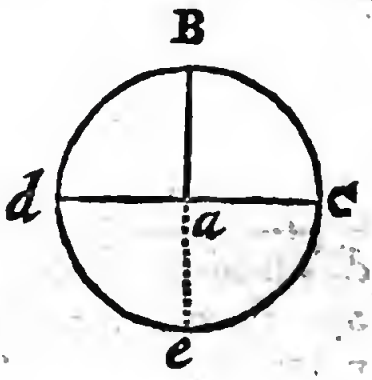


11. *Quarrer quelque polygone que ce ſoit.* Réduiſez le polygone en triangles, (3. 22.

ou

ou 24.) faites autant de rectangles égaux à ces triangles ; (9. 9.) en ſorte que tous ces rectangles ayent une même longueur : (9. 10.) joignez tous ces rectangles enſemble, pour en faire un rectangle total, & faites un quarré (9. 7.) égal à ce rectangle, & vous aurez ce que vous prétendiez.

12. *Diviſer un cercle en quatre & en ſix, & tous les arcs en deux parties égales.* Pour le diviſer en 4. il faut tirer deux perpendiculaires par le centre, comme *d a c* & B *a e*. Si on veut le diviſer en 8. on n'a qu'à diviſer en deux chaque arc *B c*, *c e*, *&c.* ce qui ſe fait en décrivant des points B & *c*, deux arcs de cercles à la même ouverture du compas : car du point où ces deux arcs ſe croiſent, on tirera vers le centre *a* une ligne qui diviſera l'arc B *c* en deux également : ainſi faut-il faire à l'égard des autres arcs. Pour diviſer le cercle en ſix, il ne faut que prendre avec le compas le demi-diametre : car l'appliquant ſix fois tout autour ſur la circonference, il la meſurera parfaitement : ainſi on peut enſuite diviſer le cercle en 12. & en 24. & en 48. *&c.*

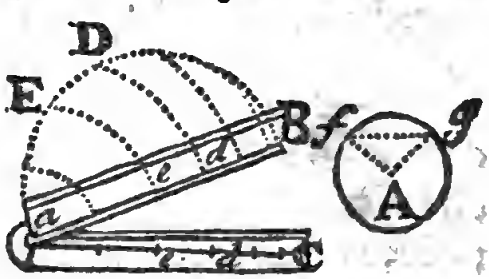


13. *Divi-*

13. *Diviſer un cercle en cinq, en quinze, & en d'autres parties égales.* Cela ſe peut faire geométriquement en cette maniere, que je démontre dans l'Algebre. Faites un triangle rectangle, dont une jambe ſoit le demi-diametre du cercle, & l'autre la moitié de demi-diametre. De l'hypotenuſe de ce triangle ôtez la moitié du demi-diametre, ce qui reſtera ſera la corde de 36. d. & le côté d'un décagone. En doublant cet arc, on aura l'arc de 72. d. qui eſt la cinquiéme partie du cercle; & la corde de ces 72. d. ſera l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, dont une jambe eſt le demi-diametre, & l'autre le côté du décagone. Or comme d'ailleurs on a auſſi trouvé 60. d on aura encore la difference de 36. à 60. ſçavoir, 24. d. qui eſt la quinziéme partie du cercle. Mais pour la pratique, le plus court & le plus ſeur, c'eſt de chercher avec le compas, à diverſes repriſes, une ouverture, qui étant appliquée cinq fois tout autour du cercle, le meſure préciſément: aprés cela chacune de ces parties ſe diviſera de même façon en trois, en cherchant avec le compas, & revenant quand on n'a pas bien trouvé juſte du premier coup: ainſi on aura le cercle diviſé en 15. Que ſi chacune de ces 15. parties ſe diviſe encore en quatre,

tre, & chacune de ces quatre en ſix, on aura tout le cercle diviſé en 360. degrez. Et cette diviſion eſt trés-commode pour l'uſage. Remarquez qu'on n'a pas trouvé le moyen de diviſer geométriquement un arc en trois parties égales, ni en cinq, ni en ſept, ni en d'autres nombres impairs, je dis geométriquement, en n'employant que la ligne droite & le cercle.

Cette diviſion du cercle en 360. *degrez eſt encore plus utile, quand on ſçait ſe ſervir du* Compas de proportion : *c'eſt une ſorte de compas, qui a les branches plates, a B, a C, ſur leſquelles il y a diverſes lignes & diverſes diviſions, dont celles qui ſont le plus en uſage ſe réduiſent à deux : car ſur un côté du compas il y a une ligne, en chaque branche a e B, & a e C, qui ſert à diviſer tout d'un coup un cercle en* 360. *& pour en prendre tout autant de degrez que l'on voudra. Cette diviſion du compas ſe fait de cette ſorte.....*

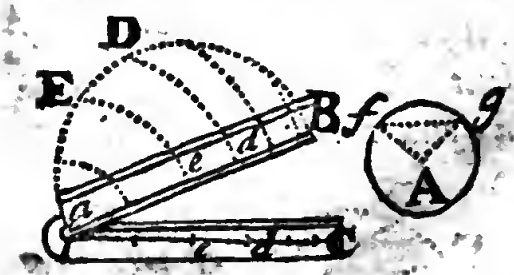


14. *Marquer un compas de proportion pour la diviſion du cercle.* Imaginez le demi-cercle *a* E D B, qui ſoit parfaitement diviſé en ſes 180. degrez ; ſi du point *a* par chaque degré on tiroit des

arcs

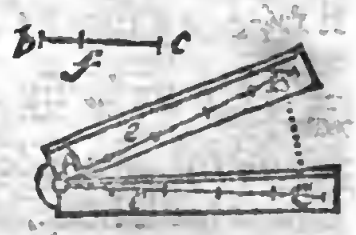
arcs qui coupaſſent la ligne *a e* B : par exemple, ſi du 60. degré E on tiroit l'arc E *e*, & ſi du 90. degré D on tiroit l'arc D *d*, *&c.* il faudroit marquer 60. dans la branche du compas, vis-à-vis de *e*, & 90. vis-à-vis de *d*, *&c.* Que ſi l'on en faiſoit autant dans l'autre branche *a* C, on auroit ce côté du compas diviſé comme il faudroit.

15. *Expliquer l'uſage du compas de proportion pour diviſer le cercle.* Soit le cercle donné A *f*, prenez avec le compas ordinaire le demi-diemetre A *f*, & puis appliquant une pointe de ce même compas ordinaire ſur le point *e*, c'eſt-à-dire, ſur le 60. degré d'une branche du compas de proportion, écartez ou approchez l'autre branche, en ſorte que l'autre pointe du compas ordinaire tombe préciſément ſur le point *e* de l'autre branche du compas de proportion, afin que la diſtance *e e* ſoit égale au demi-diametre A *f*; alors ſi vous voulez trouver tout d'un coup 90. degrez du cercle donné, mettez les deux points du compas ſur les deux points *d*, *d*, & tranſportez cette diſtance ſur *f g*, & vous aurez l'arc *f g* de 90. degrez.

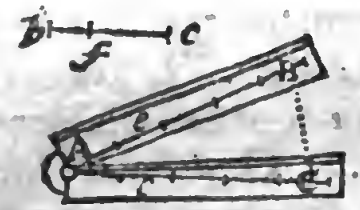


grez. Que si vous vouliez prendre 35. degrez, vous n'auriez de même qu'à appliquer les pointes du compas ordinaire sur les points des lignes *a* B, *a* C, dans lesquels est le 35. degré, & transporter cette distance sur le cercle donné, & ainsi faudroit-il faire pour tout autre degré que ce soit. Tout cela est fondé sur les propositions 42. 43. 49. 50. du livre sixiéme: car comme tous les cercles sont figures semblables, (6. 50.) la corde *fg* sera au demi-diametre A *f* comme la corde *a* D au demi-diametre *e* D, c'est-à-dire, comme *a d* à *a e*. D'ailleurs les triangles *a d d* & *a e e* sont semblables, & ainsi *d d. e e :: a d. a. e.* Or *d d* a été fait égal à *fg*, & *e e* à A *f*: donc *fg*. A *f* :: *a d. a e.*

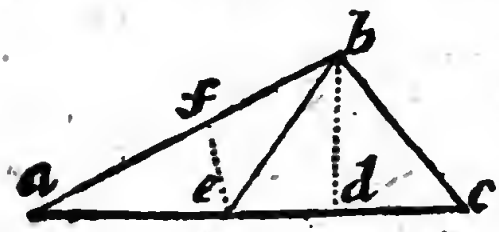
16. *Marquer le compas de proportion pour la division des lignes droites.* Du centre du compas soient tirées deux lignes droites sur les branches vers B & vers C, lesquelles soient divisées chacune en 100. ou en 100. parties égales: & cela servira pour diviser tout d'un coup une ligne donnée en autant de parties que l'on voudra. Par exemple, soit la ligne donnée *b c*, & qu'il en faille prendre $\frac{25}{97}$ c'est-



c'eſt-à-dire, 25. nonante-ſeptiémes parties; il faudroit pour cela diviſer toute la ligne *b c* en 97. parties égales, pour en prendre enſuite 25. ce qui ſeroit bien long à faire; mais avec le compas de proportion on le fait fort aiſément. Prenez avec le compas ordinaire la longueur de la ligne *b c*, & appliquant une pointe ſur la quatre-vingt-dix-ſeptiéme partie B d'une branche du compas de proportion, approchez ou écartez l'autre branche, en ſorte que l'autre pointe tombe préciſément ſur la 97e. partie C de l'autre branche; alors mettez les deux pointes ſur la 25e. partie *e e* de l'une & de l'autre branche, & tranſportez la diſtance *e e* ſur *b f*, & *b f*, ſera juſtement $\frac{25}{97}$ de toute la ligne *b c*: ce qui eſt auſſi fondé ſur ce que les triangles A B C & A *e e* ſont ſemblables.



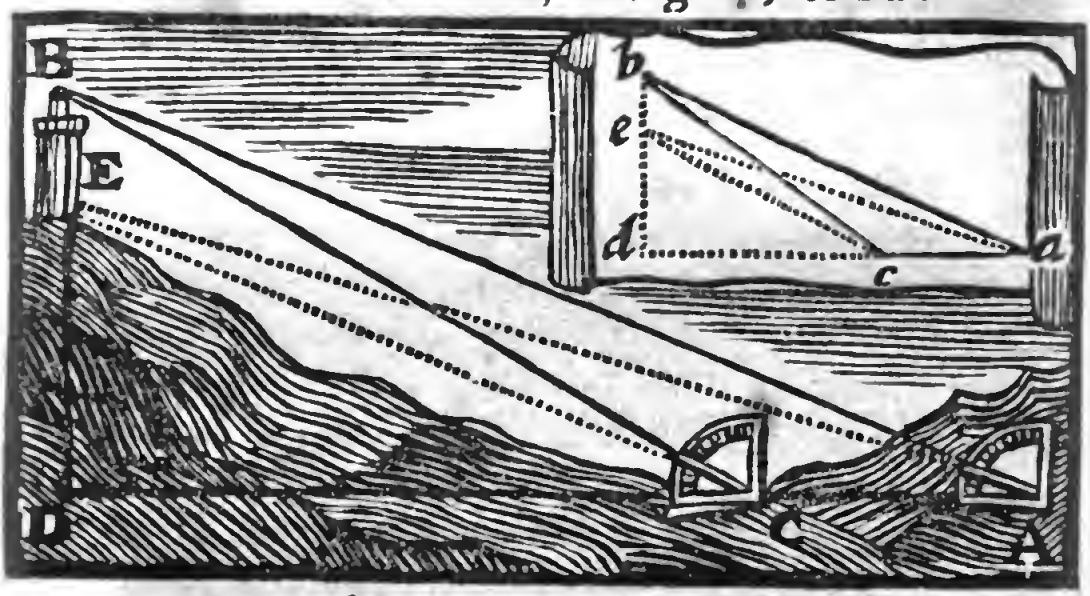
17. *Sur une ligne donnée faire un angle de tant de degrez que l'on voudra.* Soit la ligne donnée *a c*, & qu'il faille y faire un angle de 30. degrez. Du point



a,

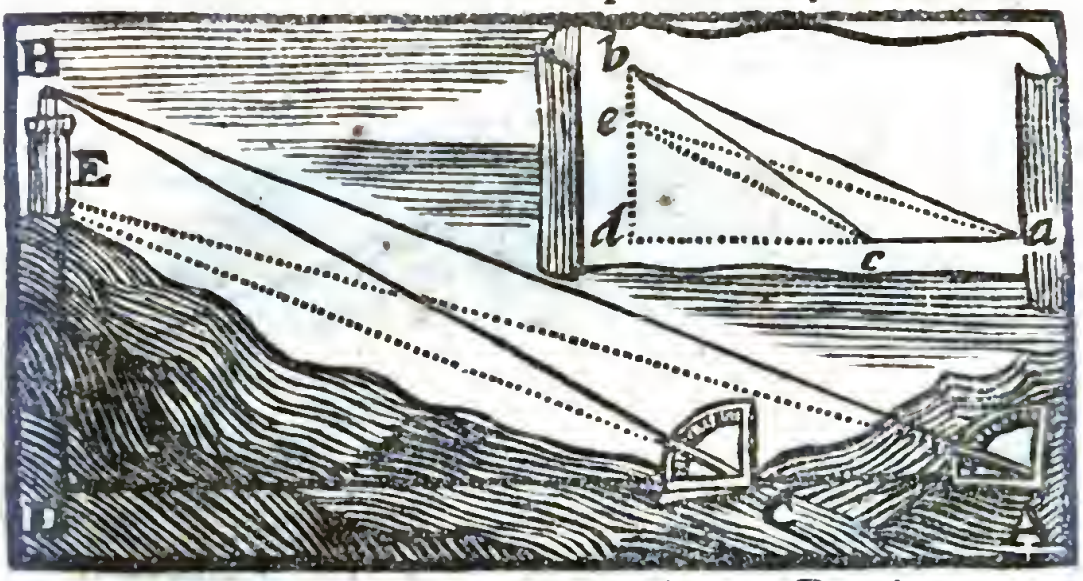
a, comme du centre, faites un cercle *c f*, dans lequel vous prendrez avec le compas de proportion, ou autrement, 30. degrez depuis *c* juſqu'à *f*, & par ce 30. degré vous tirerez la ligne *a f*, qui avec la ligne *a c* fera un angle de 30. d.

18. *Connoiſſant les angles d'un triangle, & un côté, trouver les autres côtez.* On vous dit qu'il y a un triangle dans le monde, dont la baſe A C a dix toiſes, & les deux angles d'autour de la baſe ſont l'un A C B de 150. degrez, & l'au-



tre C A B de 20. (& par conſequent le troiſiéme angle vers la pointe ſera de 10. afin que tous trois 150. 20. 10. enſemble faſſent 180. c'eſt-à-dire, deux droits) & on vous demande combien de toiſes doit avoir chacun des deux autres côtez A B, C B. Faites ſur du papier, ou plûtôt

tôt ſur du carton fin, un triangle ſemblable *a c b*, en cette ſorte: prenez une baſe à diſcretion *a c* de 10. pouces, ou de dix autres parties telles qu'il vous plaira: ſur *c a* faites deux angles, l'un *c a b* de 20. degrez, & l'autre *a c b* de 150. degrez, (9. 17.) les deux lignes *a b*, *c b* ſe croiſeront en quelque part, ſçavoir en *b*. Meſurez donc combien de pouces il y a dans



a b ou dans *c b*: car vous ſerez aſſeuré que tout autant de pouces que vous aurez trouvé en *a b*, il y aura auſſi tout autant de toiſes dans A B; & de même dans C B, autant que dans *c b*. Car puiſque les triangles ſont ſemblables ayant les angles égaux, *a c* ſera à *a b* :: comme A C à A B.

19. *Meſurer les diſtances, les hauteurs, les profondeurs, & generalement toutes les grandeurs des lieux éloignez & inacceſſi-*

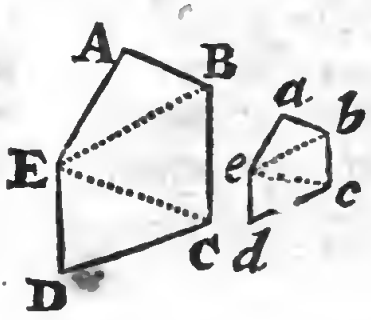
ceſſibles. Si au haut d'une montagne qui paroit de loin il y a une tour B E, & qu'on veuille en obſerver la diſtance & la hauteur ; il faut avec quelque ſorte d'inſtrument, (comme eſt un Quart-de-nonante, c'eſt-à-dire, un quart de cercle diviſé en 90. degrez garni d'une regle qui roule autour du centre, laquelle s'appelle *Alidade*) il faut, dis-je, avec cet inſtrument prendre deux angles de deux divers endroits en cette maniere. Si vous étes en A, placez l'inſtrument en telle ſorte qu'un côté réponde juſtement à la ligne horizontale A D, ſans hauſſer, ni baiſſer de part ou d'autre : mettez l'œil en A, c'eſt-à-dire, vers le centre de l'inſtrument, & tournez la regle en telle ſorte qu'elle ſoit dirigée vers la pointe de la tour B ; ſi bien que cette regle raſe ainſi vôtre rayon viſuel, par lequel vous regardez la pointe B ; alors cette regle vous marquera dans la circonference, de combien de degrez eſt l'angle B A D : car les degrez ſont marquez dans cette circonference de l'inſtrument. Après cela changez de place, & dans un lieu bien plain & uni avancez-vous de 10. toiſes (ou de telle autre diſtance qu'il vous plaira) juſqu'à C, & là, prenez derechef un autre angle B C D, par le moyen duquel vous aurez l'angle

de ſuite B C A, puiſque ces deux enſemble ſont égaux à deux droits: ainſi dans le triangle A C B vous connoiſſez la baſe que vous avez priſe de 10. toiſes: vous connoiſſez encore les deux angles qui ſont ſur la baſe; & par conſequent vous avez de quoi connoître le côté C B, ou le côté A B. (9. 18.) Vous connoîtrez encore la hauteur B D, ou la diſtance A D, ſi dans le petit triangle ſemblable vous tirez du point *b* une perpendiculaire *b d*; car B *D* ou A D auront autant de toiſes que *b d*, ou *a d* auront de pouces. Que ſi après avoir pris la hauteur B D, on prend encore par la même methode la hauteur E D, on aura auſſi la grandeur B E depuis le haut juſques au bas de la tour.

Quelquefois au lieu d'avancer vers la tour, & de faire les obſervations de haut en bas, ou des angles que ſont les lignes viſuelles avec la ligne horizontale; il eſt bon de faire les deux ſtations à côté l'une de l'autre: mais cela revient toûjours au même, & la pratique n'en eſt point au fond differente. L'on voit bien auſſi que par ce moyen on peut meſurer toutes les grandeurs imaginables, pourveu qu'on en puiſſe obſerver les extrémitez de deux endroits differens. On ne s'arrête pas ici à décrire les pratiques particulieres, ni les avantages que l'on retire

tire des lunettes que l'on a trouvé le moyen de mettre à l'Alidade de l'instrument, qui est une commodité inestimable.

20. *Prendre le plan d'une Place.* Soit une Ville ou autre Place A B C D E, & qu'on vous ordonne d'en prendre le plan, & d'en faire la figure; prenez toutes les distances des côtez & des lignes tirées d'angle à angle, & raportez-les à proportion dans une figure sur du papier: par exemple, ayant trouvé qu'A B est de 30. toises, B C de 59. C D de 50. B E de 67. A E de 49. *&c.* après avoir fait une échelle sur du papier, divisée en 100. petites parties, faites une ligne *a b* de 30 parties, *b e* de 67. *a e* de 49. ces lignes jointes ensemble font le triangle *a b e* tout semblable au triangle A B E, & continuant ainsi à faire *b e c* sembable à B E C, *&c.* vous aurez une figure totale *a b c d e* semblable à la place A B C D E.



21. Que si on ne peut pas entrer dans la place, ou la percer pour mesurer la distance des lignes B E, E C, il faut prendre les angles de la place, & les rapporter sur la figure, en sorte que si l'angle B A E est de 66. degrez, l'angle *b a e* soit aussi de 66. degrez: ainsi des autres.

22. *Faire la carte d'une Ville ou d'un Païs.* Montez ſur deux lieux élevez A & B, d'où l'on puiſſe découvrir la Ville ou le païs dont vous voulez faire la carte: ayez un quart de 90. ou un cercle tout entier, ou bien un demi-cercle ſeulement diviſé par degrez avec ſon alidade au centre; placez premiérement l'inſtrument ſur A, en ſorte qu'un de ſes côtez réponde d'A vers B: l'inſtrument étant ainſi

placé & affermi, regardez les clochers, les maiſons extraordinaires, ou les montagnes, & autres endroits conſiderables, comme E, D, C, *&c.* & prenez tous ces angles avec l'alidade, & écrivez tout cela pour vous en ſouvenir; l'angle C A B, par exemple, eſt de 50 degrez 30'. l'angle D A B de 45. degrez 8'. *&c.* puis faites-en autant de deſſus B: & écrivez, l'angle A B C

eſt

eſt de 40. d. 10'. l'angle A B D de 47. d. 28'. *&c.* Après quoi prenez ſur du papier une ligne à diſcretion *a b*, & faites des angles égaux à ceux que vous avez trouvez : *c a b* égal à C A B, *d a b* égal à D A B, *a b c* à A B C, *&c.* & ainſi vous aurez les points *c*, *d*, *e*, *&c.* qui ſeront dans la même diſpoſition que les clochers ou les autres endroits conſiderables, C, D, E, *&c.* Or ayant une fois ces endroits principaux, tout le reſte ſe peut tracer à veuë d'œil. Pour faire une operation plus juſte, il eſt bon de prendre les angles encore d'un troiſiéme lieu, & même d'un quatriéme ; afin que tout s'accordant, on ſçache que l'operation eſt bien faite

23. *Connoiſſant deux côtez d'un triangle, & l'angle d'entre deux, trouver le troiſiéme côté & les deux autres angles.*.....

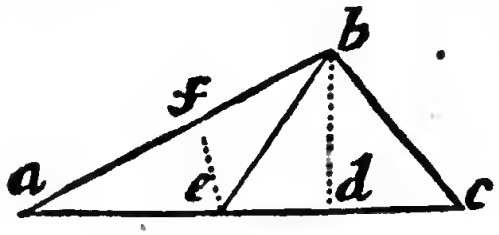
24. *Connoiſſant deux côtez & un angle oppoſé d un de ces côtez, connoître le troiſiéme côté & les deux autres angles* : pourvû qu'on ſçache ſi l'angle qu'on cherche eſt aigu ou obtus.....

25. *Connoiſſant les angles & un côté, connoître les autres côtez.....*

26. *Connoiſſant les trois côtez, connoître tous les angles.* Tout cela ſe trouve parfaitement, en faiſant des triangles ſemblables ſur du carton fin.

27. *Meſurer* l'aire, (*c'eſt-à-dire, la*

grandeur ou la capacité interieure) *d'un triangle donné* a b c. Du ſommet *b* tirez la perpendiculaire *b d* ſur la baſe *a c* prolongée, s'il en eſt beſoin; diviſez *a c* en 10. (ou en tant d'autres parties qu'il vous plaira) & voyez combien de ces parties ſont contenuës dans *b d*: car en multipliant la moitié de *b d* par 10. vous aurez l'aire du triangle, (3. 18.) Comme ſi *b d* contient 12. parties de celles dont *a c* en contient 10. il faut multiplier 6. par 10. pour avoir 60. qui eſt la grandeur du triangle *a b c*, c'eſt-à-dire, que ce triangle contient autant d'eſpace qu'en contiendroient 60. petits quarrez, dont le côté de chacun ſeroit la dixiéme partie de *a c*.



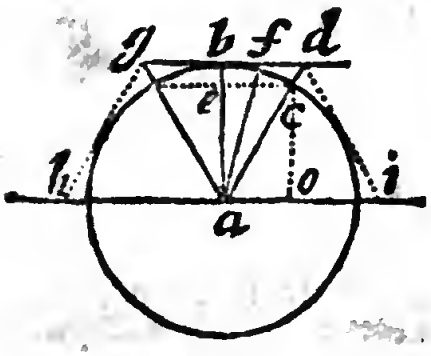
Ayant égard à la pratique, il n'y a point de methode plus facile, ni même plus exacte, que celle-ci: mais en de certains cas, il eſt bon de ſçavoir meſurer ces choſes avec une certaine préciſion qui ne peut ſe trouver que par le moyen du calcul. Voici donc les principes d'où l'on tire tout l'artifice du calcul.

28. *Dans un triangle rectangle* a b d, *connoiſſant deux côtez, connoître le troiſiéme côté par le calcul.* Soit la jambe *b d* de 3. toiſes, & la jambe *a d* de 4. toiſes; multipliez

tipliez 3. par 3. & 4. par 4. pour faire les deux quarrez 9. & 16. ces deux quarrez joints enſemble ſeront égaux au quarré de l'hypotenuſe *a b*: (6. 61.) & par conſequent je voy que le quarré de *a b* eſt 9. plus 16. c'eſt-à-dire 25. ainſi pour ſçavoir la grandeur de *a b*, je n'ai qu'à prendre le côté ou la racine quarrée de 25. qui eſt 5. d'où je conclus que *a b* eſt de 5. toiſes. Si l'hypotenuſe *a b* 5. eſt connuë avec une jambe *a d* 4. il faut ſouſtraire le quarré 16. du quarré 25. & il reſtera 9. dont la racine 3. eſt la grandeur de l'autre jambe *b d*. Quelquefois il arrive que les deux quarrez des jambes joints enſemble ne font pas un nombre quarré, ou que le quarré d'une jambe ſouſtrait du quarré de l'hypotenuſe ne laiſſe pas un nombre quarré: comme ſi ler jambes ſont 2. & 3. leurs quarrez ſeront 4. & 9. qui joints enſemble font 13. Or 13. n'eſt point nombre quarré, & par conſequent n'a point de racine préciſe: mais néanmoins il y a des nombres qui en approchent, comme ici $3\frac{3}{5}$ eſt à peu près la racine de 13. car $3\frac{3}{15}$ multiplié par ſoi-même, fait 13. moins $\frac{1}{25}$: ainſi le côté *a b* eſt de $3\frac{3}{5}$, & d'un peu davantage.

On ne donne pas la methode d'extraire ces racines quarrées, parce que c'eſt une regle d'Arithmetique, de quoi on ne traite pas ici.

29. *Calculer la Tangente, la Secante, & le Sinus de* 30. *degrez.* Soit, par exemple, *b a* le rayon ou ſinus total, *a d* la ſecante de 30. degrez, *b d* la tangente, *c e* le ſinus; il eſt aiſé de voir que *b d* eſt la moitié de *a d*: car en tirant *a g* une autre ſecante de 30. degrez, le triangle *g a d* ſera équilateral: car chacun des angles *g d*, & *g a d* ſera de 60. degrez: ainſi *b d* étant la moitié de *d g*, elle ſera auſſi la moitié de *a d*: par même raiſon *c e* ſera la moitié de *a c*. Suppoſant donc dans le triangle rectangle *a e c*, que l'hypotenuſe *a c* eſt de 2. & la jambe *e c* d'1. & ôtant le quarré 1. du quarré 4. nous aurons 3. égal au quarré du côté *a e*, égal à *c o*. (qui eſt le ſinus de l'arc *c i* de 60. degrez.) Mais ſi au lieu de prendre 2. & 1. pour *a c*, & *c e*, nous prenons 1,000,000 & 500,000, le quarré de *c e*, ſçavoir 250,000,000,000 ôté du quarré 1,000,000,000,000, laiſſera 750,000,000,000, dont la racine à peu près eſt 866,025. pour *a e*, ou *c o* ſinus de 60. degrez.



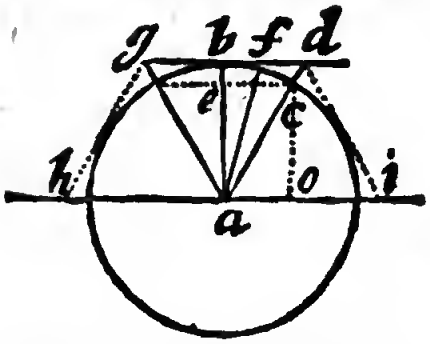
30. Con-

30. *Connoiſſant* c e, *le ſinus d'un angle quelconque*, *connoitre* c o, *le ſinus du* complement *de cet angle.* *Le complement* d'un angle eſt celui qui reſte pour faire 90. degrez. Par exemple, ayant l'angle *c a b* de 30. degrez, ſon complement eſt *c a i* de 60. degrez; car 60. avec 30. font 90. d. Cette propoſition eſt démontrée dans la précedente.

31. *Connoiſſant* e c *le ſinus d'un angle*, *& le ſinus de ſon complement*, *ſçavoir* c o *ou* a e; *connoître la tangente* b d, *& la ſecante* a d. Comme les triangles *a e c* & *a b d* ſont ſemblables, il s'enſuit que *a e. e c* :: *a b. b d* :: & *a e. a c* :: *a b. a d* :: & ainſi par la regle-de-trois d'Arithmetique, on trouve que l'arc *c b* étant de 30. degrez, la tangente *b d* eſt de 577,350. & la ſecante *a d* de 1,154,700.

32. *Connoiſſant le ſinus*, *la tangente & la ſecante d'un arc quelconque* b c; *trouver le ſinus*, *la tangente & la ſecante de la moitié de cet arc.* Tirant *a f* par le milieu de l'arc *b c*, on aura *d. f. f b* :: *a d. a b.* (6. 72.) & par conſequent on trouvera la tangente *b f* de 15 degrez, & enſuite le ſinus & la ſecante des mêmes 15. degrez: après quoi encore, partageant derechef en deux l'arc *b f*, on trouvera le ſinus, la tangente & la ſecante de 7. degrez 30'. & puis de 3. d. 45'. & ainſi à l'infini.

33. *Trouver le ſinus* c e *de* 45. *degrez.* Il eſt égal au ſinus du complement des mêmes 45. degrez, ſçavoir à *e a*, & par conſequent on trouve encore la tangente & la ſecante de 45. degrez auſſi-bien que des moitiez 22. degrez 30'. 11. degrez 15'. *&c.*



34. *Trouver le ſinus de* 36. *d.* Ayant inſcrit un pentagone régulier dans le cercle, on ſçait la proportion qu'a le côté de ce pentagone avec le rayon. (9. 13.) Or ce côté eſt la corde de 72. degrez, & la moitié de cette corde eſt le ſinus de la moitié de 72. ſçavoir de 36. Ainſi le ſinus de 36. d. eſt connu, & par conſequent auſſi la tangente & la ſecante auſſi-bien que des moitiez 18. degrez, 9. degrez, 4. degrez 30'. 2. d. 15'. *&c.*

35. *Trouver le ſinus, la tangente, & la ſecante de* 12. *degrez, & des moitiez* 6. *degrez,* 3. *degrez,* 1. *degré* 30'. 45'. *&c.* Puis qu'on connoît la corde de 24. degrez, qui eſt le côté d'un polygone régulier de 15. côtez. (9. 13.) on connoîtra, *&c.*

36. Combinant ainſi toutes ces choſes, on aura le ſinus, tangentes & ſecantes des angles de 45'. d'1. degré 30'. de 2. degrez

grez 15'. de 3. degrez 45'. de 4. 30'. ainſi de tous les autres de 45'. en 45'.

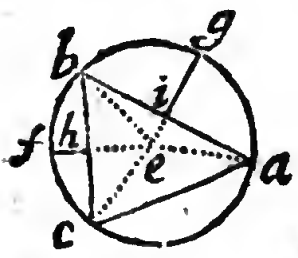
37. *Trouver les ſinus de tous les arcs qui ſont entre deux de ces arcs ainſi trouvez de* 45'. en 45'. Il faut faire une regle de proportion. Par exemple, le ſinus de 45'. étant 1308. le ſinus de 1'. ſera 29. parce que 45. 1' :: 1308. 29. de même, le ſinus de 20'. ſera 581. De même, pour avoir le ſinus de 3. degrez 30'. ayant le ſinus de 3. degrez 5233. (9. 35.) & puis le ſinus de 3. degrez 45'. 6540. (9. 32.) on trouve que ces 45'. qui ſont depuis 3. degrez juſques à 3. degrez 45'. portent 1307. d'augmentation de ſinus : car 5233. ſinus de 3. degrez, ôtez de 6540. ſinus de 3. degrez 45'. laiſſent 1307. Voulant donc trouver le ſinus de 3. degrez 30'. je dis ainſi : Si 45'. qui ſont depuis 3. degrez jnſqu'à 3. degrez 45' portent 1307. d'augmentation dans le ſinus, combien d'augmentation porteront 30'. qui ſont depuis 3. degrez juſques à 3. degrez 30'. & je trouve 871. il faut donc ajoûter 871. à 5233. & on aura 6104. pour ſinus de 3. degrez 30'. ainſi de tous les autres.

Par ce moyen on peut faire des tables où ſoient les ſinus, les tangentes & les ſecantes de tous les angles de minute en minute depuis 0. *juſqu'à* 90. *degrez.*

Remarquez que par cette derniere regle

on ne trouve pas à la rigueur le ſinus juſte, parce que les ſinus n'augmentent pas à même proportion que les arcs : mais ce defaut eſt ici ſi petit, qu'on ne doit pas ſe mettre en peine d'une plus exacte préciſion.

38. Par le moyen de ces tables on calcule les triangles, parce qu'on eſt aſſeuré que dans tout triangle, les côtez ſont entre eux comme les ſinus des angles oppoſez: par exemple; dans le triangle *a b c*, tirant le cercle circonſcrit du centre *e*, les perpendiculaires *e i*, *e h*, partageront en deux également les côtez *a b* & *b c*. (4. 6.) ainſi *a b*. *b c* :: *a i*. *b h*. Or *a i* eſt le ſinus de l'angle *a e i* ou *a c b*, qui (4. 13.) lui eſt égal, & de même *b h* eſt le ſinus de l'angle *b e a* ou *b a c*: donc, &c.



39. Et ſur ce principe, *connoiſſant deux angles & un côté, ou deux côtez & un angle, trouver tout le reſte.* Faites par une regle de proportion, comme un côté connu au ſinus de l'angle oppoſé connu; ainſi l'autre côté connu à un quatriéme nombre qui ſera le ſinus de l'angle oppoſé à cet autre côté. Ou bien ſi deux angles ſont connus avec un côté, il faut faire comme le ſinus d'un angle connu au côté oppoſé

à

à ce même angle : ainſi le ſinus de l'autre angle connu à un quatriéme nombre, qui ſera le côté oppoſé à cet autre angle, *&c.*

40. Ces operations ſont beaucoup abregées par les logarithmes : car on a eu ſoin de mettre dans les tables, non ſeulement les ſinus & les tangentes, mais auſſi leurs logarithmes, qui leur répondent vis-à-vis. De ſorte qu'au lieu des multiplications & des diviſions qu'il faudroit faire avec une peine inſupportable, en ſe ſervant des ſinus & des tangentes, il ne faut que faire des additions ou des ſouſtractions, en employant les logarithmes : comme ſi dans le triangle A B C, (9. 18.) dont le côté A C eſt connu de 10. toiſes, l'angle A B C de 10. degrez, l'angle C A B de 20. on demande le côté B C, il faudroit dire comme le ſinus de l'angle B, (qui eſt dans les tables 17364.) au côté A C, qui eſt connu de 10. toiſes : ainſi le ſinus de l'angle A (qui eſt dans les tables 34202.) eſt au côté qu'on cherche C B. pour trouver ce quatriéme C B par une regle-de-trois, il faudroit multiplier le ſecond terme 10. par le troiſiéme 34202. & diviſer le produit 342020. par le premier 17364. ce qui eſt bien long. Mais ſi au lieu de ces nombres nous prenons leurs logarithmes, ajoûtant le logarithme de 20. degrez au logarithme

Sin. angl. A. 20. d.	9. 5340517.
A C. 10. toiſes.	1. 0000000.
Somme.	10. 5340517.
Sin. angl. B. 10. d.	9. 2396702.
Reſte, qui eſt CB. 19. $\frac{7}{10}$ toiſes.	1. 2943815.

rithme de 10. toiſes, & de la ſomme ôtant le logarithme de 10. degrez, il reſte le logarithme 1. 2943. *&c.* qui dans la table répond entre 19. & 20. de ſorte que le côté C B doit être de près de 20. toiſes.

Les livres qui traitent des ſinus & des logarithmes expliquent ceci plus en particulier. Je croy pourtant en avoir dit autant qu'il en faut ſçavoir pour pouvoir trouver de ſoi-méme toutes ces choſes. On ajoûtera quelques autres propoſitions ſur ce ſujet dans la ſuite de cette Geométrie.

41. *Trouver une ligne droite, qui ſoit égale à la circonference d'un cercle à ſi peu près que l'on voudra:* prenant douze fois la tangente de 30. degrez qui eſt *b d*, & rangeant ces 12. tangentes au tour du cercle, en ſorte qu'elles ſoient jointes deux à deux en ligne droite, comme on voit en la figure

figure de l'art: 29. où *dg* ſont deux tangentes oppoſées, chacune de 30. degrez, & de même *gh*; & *di*, *&c.* On fera ainſi un polygone circonſcrit de 6. côtez, dont la circonference eſt plus grande que celle du cercle (4. 27.) Que ſi on prend douze fois le ſinus *ee*, on fera un polygone inſcrit de 6. côtez, dont la circonference eſt plus petite que celle du cercle. De ſorte que donnant au rayon *ab*, 1,000, 000; *bd*, qui eſt 577, 350 pris douze fois, c'eſt-à-dire, 6, 928, 200. eſt plus grand que la circonference du cercle, & *ec* 500,000. pris douze fois, ſçavoir, 6,000, 000, eſt plus petit que la circonference du même cercle.

42. Mais ſi au lieu de prendre douze fois la tangente & le ſinus de 30. degrez, l'on prend 360. fois la tangente & le ſinus d'un degré, ſçavoir 17455. & 17452. on fera deux polygones, l'un circonſcrit 6, 283, 800 plus grand, & l'autre inſcrit 6,282, 720 plus petit que le cercle.

43. Enfin donnant au rayon 100, 000, 000, 000, & prenant la tangente & le ſinus d'une minute 21600 fois (car il y a autant de minutes dans un cercle) on aura 628, 318, 512, 000 plus petit, (car le ſinus d'1'. eſt 29, 088, 820.) & 628, 318, 533, 600 plus grand (car la tangente d'1'. eſt 29, 088, 821.) Que ſi ces trois nombres

bres du rayon, du polygone circonſcrit, & de l'inſcrit, ſont diviſez par 100,000, il reſtera pour le rayon 1,000,000: & le perimetre du polygone circonſcrit ſera de $6,283,185\ \frac{336}{1000}$: & le perimetre de l'inſcrit ſera de $6,283,185\ \frac{12}{100}$. De ſorte que ces deux perimetres, dont l'un eſt plus grand que la circonference du cercle; & l'autre plus petit, ne differant pas néanmoins entre eux d'une millionniéme partie du rayon. Si l'on vouloit prendre juſte le ſinus & la tangente d'une ſeconde, on s'approcheroit encore incomparablement davantage de l'égalité entre les deux perimetres du polygone circonſcrit & de l'inſcrit.

44. Pour la pratique, on poſe que le diametre eſt à peu près à la circonference comme 7. à 22. c'eſt-à-dire que ſi le demi-diametre ou le rayon eſt diviſe en 7. la circonference en contiendra 44. preſque: & cela s'accorde aſſez avec ce qui vient d'être expliqué. Car 7. 44 :: 100. 628. $\frac{4}{7}$

45. *Trouver l'aire d'un cercle donné.* Si le rayon ou demi-diametre eſt partagé en 1000. la circonference ſera à peu près de 6283. Ainſi multipliant la moitié de cette circonference 3141. par le rayon 1000. on fait

fait 3141000. pour toute l'aire du cercle: (4. 11.) mais ſi le demi-diametre eſt de quelque autre meſure, par exemple de 9. pouces, il faut faire 1000. 3141 :: 9. 16 $\frac{269}{1000}$ & puis multiplier ce dernier nombre (qui doit être la demicirconference) par 9. (qui eſt le demidiametre) & on a 173 $\frac{421}{100}$ pour l'aire du cercle.

Il eſt plus commode, ce me ſemble, de ſe ſervir de cette proportion de 1000. *à* 3141. *que de celle dont on ſe ſert communément de* 7. *à* 22.

46. *Meſurer la grandeur d'un parallelepipede ou d'un cylindre.* Multipliez ſa baſe par ſa hauteur perpendiculaire.

47. *Meſurer une pyramide ou un cone.* Multipliez la troiſiéme partie de ſa baſe par ſa hauteur.

48. *Meſurer une ſphere.* Multipliez la troiſiéme partie de ſa ſurface par le demi-diametre, ou bien les deux tiers de ſon plus grand cercle par ſon diametre.

FIN.

TA-

TABLE

DES MOTS EXPLIQUEZ en cette Geométrie.

Le premier chifre ſignifie le Livre, & les autres, l'article.

AIre, capacité ou grandeur d'une figure, 9. 25
Alternando, invertendo, &c. 6. 9. 8
Amblygone, ou obtuſangle. 2. 5
Angles alternes, internes. 1. 30
Angle droit, obtus, aigu. 1. 17
Angles externes du triangle. 2. 10
Angles oppoſez, de ſuite. 1. 17
Angle rectiligne, curviligne, mixte. 1. 6
Angle ſoûtenu, ou ſoûtendu, ou oppoſé. 2. 17
Arc. 1. 11

C.

CErcle. 1. 10
Circonference. 1. 10
Commenſurables. 7. 4
Commenſurable en puiſſance. 7. 33
Compas de proportion. 9. 14

Com-

Complemens dans le parallelogramme. 3. 12
Complement d'un angle. 9. 30
Congruës figures. 2. 12
Converſe propoſition. 1. 33
Convertendo, componendo, &c. 6. 11. 12. &c.
Corps ou ſolide. 1. 4
Côtez ou racines des nombres. 7. 10
Cubique nombre. 7. 39

D.

Degrez de progreſſion. 8. 10
Degrez, minutes, ſecondes. 1. 24
Diagonale, diametre, ligne tirée d'angle à angle dans les parallelogrammes. 3. 7
Diametre. 1. 12. & 3. 7

E.

Equilateral. 2. 7
Equimultiple. 6. 15
Ex æquo, *proportion.* 6. 13. 14

G.

Geométrique progreſſion. 8. 8
Gnomon ou eſquierre. 3. 12
Grandeur. 6. 1

H.

Harmonique progreſſion. 8. 32
Homologues côtez. 6. 31
Hypotenuſe, grand côté du triangle rectangle. 6. 61

I.

Jambes, côtez autour de l'angle droit d'un triangle. 6. 61

Incom-

Incommenſurables. 7. 5
Invertendo, alternando, &c. 6. 8. 9. &c.
Iſoperimetres, 4. 32. à la fin.
Iſoſcele, triangle à deux jambes égales, 2. 7

L.

LOgarithmes. 8. 16

M.

MEſurer. 7. 1
Minutes, degrez. 1. 24
Multiplier une ligne par une autre ligne, ou par une ſurface. 6. 17. 18

N.

NOmbre plan, 7. 9. *Solide.* 7. 37
Nombres plans ſemblables. 7. 14
Nombre quarré. 7. 12. *Cubique.* 7. 39

O.

OBlique, *ligne.* 1. 15
Oxygone ou acutangle. 2. 5

P.

PAralleles., 1. 26
Parallelogramme. 3. 2
Parallelogrammes d'autour du diametre, 3. 12
Partie. 7. 2. *Parties.* 7. 3
Perpendiculaire. 1. 15
Plan ou ſurface plane. 1. 5
Pouvoir : une ligne peut deux fois une autre. 7. 32
Problémes, Theorémes. 9. 1
Progreſſion Arithmetique. 8. 2. *Geométrique.* 8. 8. *Harmonique.* 8. 32

Progreſſion des quarrez, des cubes, &c. 8. 34
Proportion. 6. 6
Puiſſance premiere. 7. 32. *Seconde.* 7. 35

Q.

Quadrilatere, figure à quatre côtez. 3. 1
Quantité. 1. 1
Quarré-Quarré, ſurſolide, &c. 8. 10

R.

Racines ou côtez des nombres. 7. 10
Raiſon. 6. 2
Raiſon compoſée, 6. 26
Raiſon doublée. 6. 29. 30. *Triplée.* 6. 36
Raiſon égale ou proportion. 6. 4. 6
Raiſon plus grande. 6. 5
Rayon ou demi-diametre. 1. 13. ou *Sinus total.* 4. 9
Réciproques. 6. 65
Rectangle ſimplement pour parallelogramme rectangle. 3. 3
Rhombe, Lozange. 3. 4
Rhomboïde, Lozange irrégulier. 3. 5

S.

Scalene, triangle à trois côtez inégaux. 2. 7. *Cone ou cylindre ou parallelepipede.* 5. 12
Secante, tangente, ſinus. 4. 9
Semblables triangles. 6. 44. *Rectangle.* 6. 30
Solides. 6. 54. *Figures.* 6. 48. 49
Sinus, tangente, ſecante. 4. 9
Sinus du complement. 9. 28
Solide corps 1. 4. *Angle ſolide.* 5. 4
Surface

TABLE.

Surface plane ou plan. 1. 4
Surſolide quarré, cube, &c. 8. 10

T.

Tangente, ſinus, ſecante. 4. 9
Termes de progreſſion. 8. 1
Theoremes, problemes. 9. 1
Trapeze, quadrilatere irregulier. 3. 2

A01 1h6 2012